Kooperative Spieltheorie.

Vorlesung von Prof. K. Beer im SS 2001.

8. November 2001

Inhaltsverzeichnis

1 Verhandlungslösung **5**
1.1 Nichtkooperative Spiele(Wiederholung) 5
1.2 Beispiel: Auseinandersetzung in der Ehe 6
1.3 Konvexifizierung durch Randomisierung 12
1.4 Die Nash-Verhandlungslösung 15
1.5 Beispiele 22
1.5.1 Streit in der Ehe 22
1.5.2 Beispiel 2 24
1.5.3 Beispiel 3 25

2 Kooperative n-Personenspiele **29**
2.1 Das Konzept der charakteristischen Funktion 29
2.1.1 Einleitende Bemerkungen 29
2.1.2 Grundbegriffe 30
2.1.3 Beispiele des Entstehens einer charakteristischen Funktion aus nichtkooperativen Spielen heraus 31
2.2 Zuteilungen (Imputationen) 37
2.3 Strategische Äquivalenz und $(0,1)$-Normalisierung 40
2.4 Dominanz von Zuteilungen 48
2.5 Der c-Kern 51
2.5.1 Charakterisierung des c-Kerns 51
2.5.2 Einige Rechenbeispiele 53
2.5.3 Weitere Aussagen zum c-Kern 60
2.6 Die N-M-Lösung 63
2.6.1 Begriff der N-M-Lösung 63
2.6.2 Einige allgemeine Aussagen 64
2.6.3 Lösung einiger kooperativer 3-Personenspiele 68
2.7 Der Shapley-Vektor 71
2.7.1 Shapley Axiomatik 71
2.7.2 Der Shapley-Vektor 75
2.7.3 Anwendung des Shapley-Vektors in Majoritätsspielen . . 76

Kapitel 1

Verhandlungslösung

1.1 Nichtkooperative Spiele(Wiederholung)

In der nichtkooperativen Spieltheorie wird ein Spiel in Normalform

$$\Gamma = \langle P_1, P_2, ..., P_n, S_1, S_2, ..., S_n, H_1, H_2, ..., H_n \rangle$$

betrachtet, wobei es

P_i — Spieler, $i = 1..n$

S_i — Menge der Strategien von P_i, z.B. S_i eine endliche Menge (bei $n = 2$ setzen wir S_1 – Zeilenindizes einer Matrix, S_2 – Spaltenindizes einer Matrix.)

H_i — $H_i : \prod_{j=1}^{n} S_j \to \mathbb{R}$ — Gewinnfunktion von P_i gibt.

Das Spiel besteht darin, dass P_i (unabhängig von $P_j, j \neq i$) ein $x_i \in S_i$ wählt. Anschließend erhält P_i den Gewinn $H_i(x_1, x_2, ..., x_n)$. Das Wort "unabhängig" wird dabei so verstanden, dass die Spielregeln es nicht erlauben sollen, dass die Spieler Absprachen über ihre zu treffende Entscheidung oder die eventuelle Umverteilung der Gewinne treffen. Als Lösung wird unter anderem das Nash-Gleichgewicht akzeptiert, d.h. $x^* = [x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*]$ ist Lösung (als GS bezeichnet) des Spiels, wenn

$$H_i(x^*) \geq H_i(x^*|x_i), \ \forall x_i \in S_i, \ \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Bei sogenannten Konstantsummenspielen (d.h. $\exists\, c \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{n} H_i(x) = c, \ \forall x \in \prod_{j=1}^{n} S_j$) wird die Nash-GS i.a. als sinnvolle Lösung akzeptiert.

Bei Nichtkonstantsummenspielen ist das Nash-Konzept fragwürdig. Wir akzeptierten auch andere Herangehensweisen:

— max-min-Lösung (Sicherheitsstrategie),

— Pareto-Konzept,

— Stackelberg-Konzept.

Spiele in Normalform, in denen die Konstantsummenbedingung nicht steht (aber auch nicht verboten ist), hatten wir als nichtkooperative Spiele bezeichnet. Der wesentliche Unterschied zu den Konstantsummenspielen war, dass dann, wenn es wenigstens 2 Nash-GS x^*, x^{**} gibt, die Eigenschaften (1.1.1)

$$\left\{\begin{array}{l} H_i(x^*) = H_i(x^{**}), \forall i, (= v_i = \text{Wert des Spiels für } P_i), \\ \text{Rechteckeigenschaft, d.h. Mischung} \\ \text{aus } x^* \text{ und } x^{**} \text{ liefert auch GS,} \end{array}\right. \tag{1.1.1}$$

nicht mehr gelten müssen.

Die Forschung ging mehrere Wege:

— andere GS-Begriffe einführen, siehe oben, im Vergleich zur Nash-GS aber auch kein wesentlicher Vorteil irgeneiner anderen, wir wollen im 1.Abschnitt ein Konzept diskutieren, das Elemente der Kooperation (Einigen auf einen Kompromiss) beinhaltet, aber noch nicht das ist, was wir später als kooperatives Spiel bezeichnen werden.

— Klassen von Spielen in Normalform finden, in denen das Nash-Konzept sinnvoll erscheint, z.B. weil (1.1.1) gilt, solch eine Klasse bilden die Konstantsummenspiele. Es gibt noch weitere Klassen, die wir aber nicht betrachteten.

— Das Konzept des Spiels in Normalform fallen zu lassen und ein ganz anderes Grundmodell betrachten: Kooperation ist erlaubt. Das wird Vorlesungsgegenstand sein. Wir betrachten das Modell eines Spiels über die charakteristische Funktion, doch zuvor noch ein Beitrag zum ersten Anstrich. Wir beginnen mit einem Beispiel.

1.2 Beispiel: Auseinandersetzung in der Ehe

Von der nichtkooperativen Interpretation zur kooperativen.

Spiel Γ:

Haben 2 Spieler: P_1 — Ehemann, P_2 — Ehefrau.

Verabredet ist, dass sie am Wochenende etwas gemeinsam unternehmen (nicht getrennt). Der Mann möchte zum Fußballspiel gehen, die Frau ins Theater. Jeder Spieler hat 2 mögliche Strategien.

$$P_1 \to \left\{\begin{array}{l}\text{Fußball}\\ \text{Theater}\end{array}\right., P_2 \to \left\{\begin{array}{l}\text{Fußball}\\ \text{Theater}\end{array}\right.$$

P_1 wählt separat von P_2 im nichtkoopertiven Spiel. Der Gewinn von P_1 ist

$$H_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und von P_2 -

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zeile = Strategie von P_1, P_1 wählt Zeile i.

Spalte = Strategie von P_2, P_2 wählt Spalte j.

(Bei $i \neq j$ bleiben beide zu Hause und sind mürrisch.)

Die nichtkooperative Theorie sieht die Nash-GS als Lösung an, was auch als Umverteilung der Gewinne in einem Spiel gewertet werden kann. Wir wissen, dass in reinen Strategien eine solche GS nicht existieren muss. In gemischten Strategien wird sie existieren(da endliches Spiel).

Spiel $\hat{\Gamma}$:
P_1 wählt Zeile 1 mit Wahrscheinlichkeit s,
P_1 wählt Zeile 2 mit Wahrscheinlichkeit $1 - s$,$0 \leq s \leq 1$
P_2 wählt Spalte 1 mit Wahrscheinlichkeit t,
P_2 wählt Spalte 2 mit Wahrscheinlichkeit $1 - t$, $0 \leq t \leq 1$.

Die Gewinne(=Erwartungswerte) sind dann

$$v_1 = \hat{H}_1(s,t) = \langle [s, 1-s], H_1 \begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix} \rangle = 5st - s - t + 1$$

$$v_2 = \hat{H}_2(s,t) = \langle [s, 1-s], H_2 \begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix} \rangle = 5st - 4s - 4t + 4$$

Die nichtkooperative Theorie sieht als Lösung ein $[s^*, t^*]$ an, bei dem

$$\begin{cases} \hat{H}_1(s^*, t^*) \geq \hat{H}_1(s, t^*), \ \forall s \in [0,1] \\ \hat{H}_2(s^*, t^*) \geq \hat{H}_2(s^*, t), \ \forall t \in [0,1] \end{cases}$$

(existiert, aber eventuell nicht eindeutig, in unserem Spiel). Lösungsvorschlag der nichtkooperativen Theorie:
P_1 wähle mit Wahrscheinlichkeit s^* die erste Zeile,
P_1 wähle mit Wahrscheinlichkeit $1 - s^*$ die zweite Zeile,
P_2 wähle mit Wahrscheinlichkeit t^* die erste Spalte,
P_2 wähle mit Wahrscheinlichkeit $1 - t^*$ die zweite Spalte.

Das Konzept ist nicht voll akzeptiert, da hier z.B.

$$[s^*, t^*] = [1, 1], \qquad [s^{**}, t^{**}] = [0, 0]$$

beides Nash-GS sind und jeweils eine für einen der Partner nicht befriedigend ist.

Die kooperative Theorie geht andere Wege. Das Konzept der Verhandlungslösung geht von einer Verhandlungsmenge (= Menge möglicher akzeptierter Entscheidungen) aus und beschreibt die Auswahl einer konkreten Entscheidung aus dieser Menge.

Wir wollen zuerst am Beispiel einen Weg beschreiben, wie man diese Verhandlungsmenge erhalten kann. Später geben wir eine weitere Möglichkeit (einfachere) an. Zu allerest benötigen wir die Gewinne bei konservativem Verhalten.

Für das Verständnis, als zu betrachtendes Verhandlungskonzept, ist es wesentlich, den Übergang von der Darstellung des Spiels im Raum der s, t zur Darstellung im Raum v_1, v_2 zu verstehen: Übergang vom Strategienraum zum Zielraum. (Später wählen wir einen einfacheren Weg.)

In unserem Beispiel haben wir für die konkreten Matrizen H_1 und H_2:

$$\begin{cases} v_1(s,t) = [s, 1-s] \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix} = 5st - s - t + 1 \\ v_2(s,t) = [s, 1-s] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix} = 5st - 4s - 4t + 4 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Mit jedem Paar $[s, t] \in \{[p, q] : 0 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1\}$ (= Einheitsquadrat) ist ein Punkt $[v_1(s, t), v_2(s, t)]$ der $v_1 - v_2$-Ebene verbunden.

Wir wollen als erstes am Beispiel klären, wie das Bild des Einheitsquadrates des $s - t$-Raumes bei den nach (1.2.1) definierten Abbildungen im $v_1 - v_2$-Raum aussieht, d.h. welche Mengen von Gewinnen für die Spieler möglich sind. Dummerweise ist mit (1.2.1) die Menge der Bildpunkte nur punktweise definiert: zu konkreten $[s, t]$ erhalten wir nach (1.2.1) ein konkretes Wertepaar $[v_1, v_2]$. Uns interessiert aber die Gestalt(Skizze) (Gestalt = explizite Beschreibung) aller Bildpunkte. Die Frage, die wir beantworten wollen, lautet also: Welche Menge beschreiben die $[v_1, v_2]$ wenn $[s, t]$ das Einheitsquadrat durchläuft? Direktes Eleminieren von s und t in (1.2.1) stösst auf Schwierigkeiten. (also z.B. erste Gleich. nach s auflösen, in 2 einsetzen, erhalten quadrat Gleich bzgl t).

Wir setzen

$$\begin{cases} st = p \\ s + t = q \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Dann ist

$$\begin{cases} v_1(s,t) = 5p - q + 1 \\ v_2(s,t) = 5p - 4q + 4 \end{cases} \tag{1.2.3}$$

(1.2.2), aufgelöst nach s und t, ergibt:

$$s = \frac{q - \sqrt{q^2 - 4p}}{2}, \qquad t = \frac{q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2} \tag{1.2.4}$$

(oder ungekehrt). Da $[s, t]$ aus dem Einheitsquadrat kommen muss, so müssen $[p, q]$ folgende Beschränkungen

$$\begin{cases} 0 \leq q - \sqrt{q^2 - 4p} \leq 2 \\ 0 \leq q + \sqrt{q^2 - 4p} \leq 2 \end{cases} \tag{1.2.5}$$

auferlegt werden.

Die Lösung

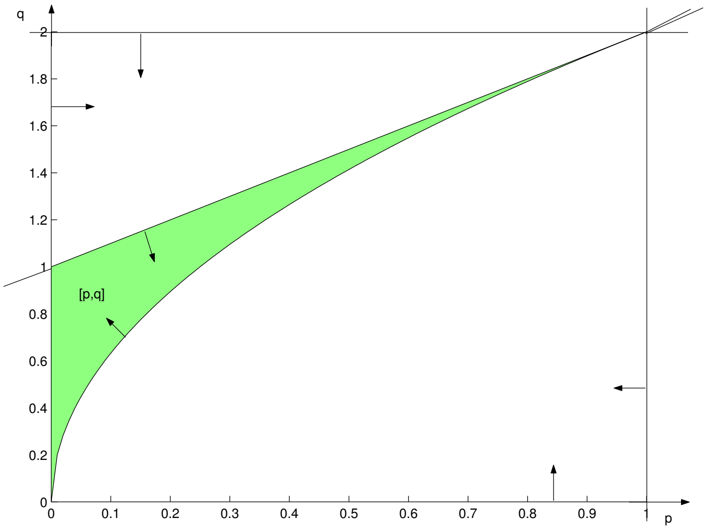
$$s = \frac{q + \sqrt{q^2 - 4p}}{2}, \qquad t = \frac{q - \sqrt{q^2 - 4p}}{2}$$

liefert (wie man leicht nachprüfen kann) nur eine Vertauschung der Rollen von s und t. Da s und t aber in (1.2.1) symmetrisch eingehen, ändert das nichts an den Werten von $[v_1, v_2]$.

Man kann nachprüfen, dass (1.2.5) äquivalent ist mit

$$\begin{cases} q^2 - 4p \geq 0 \\ 0 \leq p \leq 1 \\ 0 \leq q \leq 2 \\ q \leq 1 + p \end{cases} \tag{1.2.6}$$

Wie lauten die Bilder der Randkurven von (1.2.6) bei der Abbildung (1.2.3)?



$q = 1 + p$ ergibt in (1.2.3) eingesetzt

$$\begin{cases} v_1 = 5p - (1+p) + 1 = 4p \\ v_2 = 5p - 4(1+p) + 4 = p \end{cases}$$

also entspricht der Randkurve $q = 1 + p$ die Kurve $v_1 = 4v_2$.

$p = 0$ ergibt in (1.2.3) eingesetzt

$$\begin{cases} v_1 = 1 - q \\ v_2 = 4 - 4q \end{cases}$$

also entspricht das der Randkurve $v_2 = 4v_1$ im $v_1 - v_2$-Raum.

Neue Zeile $q^2 - 4p = 0$ ergibt in (1.2.3) eingesetzt (nach einiger Rechnung):

$$\begin{cases} v_1 = \frac{5}{4}q^2 - q + 1 \\ v_2 = \frac{5}{4}q^2 - 4q + 4, \end{cases}$$

woraus wir erhalten

$$5v_1^2 + 5v_2^2 - 10v_1v_2 - 18v_1 - 18v_2 + 45 = 0$$

als Bild der Randkurve $q^2 - 4p = 0$. Das ist eine Parabel mit dem Scheitel in $[\frac{13}{5}, \frac{4}{5}]$, die die anderen 2 Kurven in den Punkten $[v_1, v_2] = [1, 4]$ bzw. $[v_1, v_2] = [4, 1]$ schneidet.

$p = 1$ ergibt, in (1.2.3) eingesetzt:

$$\begin{cases} v_1 = 6 - q \\ v_2 = 9 - 4q \end{cases} \Rightarrow v_2 = -15 + 4v_1$$

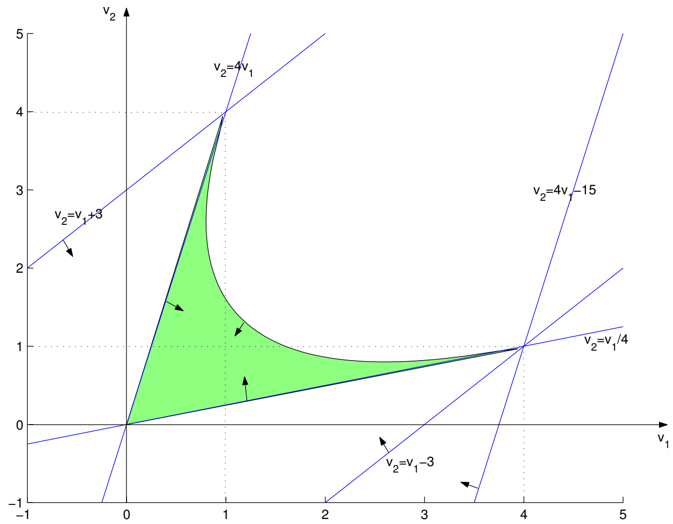
$q = 0$ ergibt:

$$\begin{cases} v_1 = 5p + 1 \\ v_2 = 5p + 4 \end{cases} \Rightarrow v_1 - v_2 = 3$$

$q = 2$ ergibt:

$$\begin{cases} v_1 = 5p - 1 \\ v_2 = 5p - 4 \end{cases} \Rightarrow v_2 - v_1 = -3$$

Damit ergibt sich als Bildmenge vom Einheitsquadrat im $s - t$-Raum im $v_1 - v_2$-Raum die Menge. (Durch Probepunkte wird ermittelt, auf welcher Seite der Randkurve die Menge liegt):



Damit ergibt sich die grau bezeichnete Menge als Menge der möglichen $v_1 - v_2$-Werte(in der gemischten Erweiterung). Wir vermerken, dass sie nicht konvex ist.

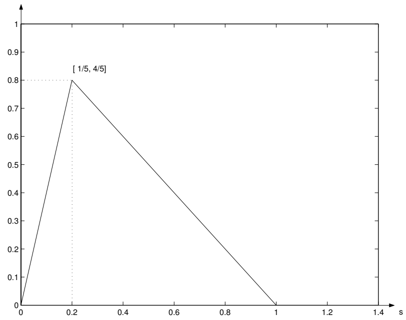
Jeder Punkt dieser Menge ist im Spiel durch gemischte Strategien (s, t) erreichbar. Aber nicht jeden Punkt werden die Spieler akzeptieren. Die Spieltheorie geht davon aus, dass Spieler P_1 nur solch einen Punkt $[v_1, v_2]$ des Zielraumes akzeptieren wird, in dem v_1(sein Gewinn) nicht kleiner ist als sein unterer Spielwert $\underline{v_1} = \max_{0\leq s\leq 1} \min_{0\leq t\leq 1} \hat{H}_1(s,t)$, den er sich in jedem Fall sichern kann.

Analog muß $v_2 \geq \underline{v_2} = \max_{0\leq t\leq 1} \min_{0\leq s\leq 1} \hat{H}_2(s,t)$ sein.

Die beiden Zahlen $\underline{v_1}$ und $\underline{v_2}$ ermitteln wir auf bekannte Weise aus der Formel (1.2.1):

$$\varphi(s) = \min_{0\leq t\leq 1}\{5st - s - t + 1\} = \min\{1 - s, 4s\} = \begin{cases} 4s, s \leq \frac{1}{5} \\ 1 - s, s \geq \frac{1}{5} \end{cases}$$

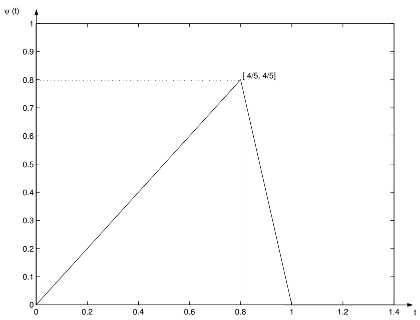
($5st - s - t + 1$ ist linear in t, d.h. Minimum wird am Rande des Intervalls $[0, 1]$ angenommen, d.h. entweder bei $t = 0 \Rightarrow 5s \cdot 0 - s - 0 + 1 = 1 - s$, oder bei $t = 1 \Rightarrow 5s \cdot 1 - s - 1 + 1 = 4s$).



$\Rightarrow \underline{v_1} = \frac{4}{5}$ (es stellt sich für P_1 ein Gewinn $v_1 \geq \underline{v_1} = \frac{4}{5}$ ein, wenn P_1 $s = \frac{1}{5}$ wählt.)

Analog ergibt sich für P_2:

$$\psi(t) = \min_{0 \leq s \leq 1} \{5st - 4s - 4t + 4\} = \min\{t, 4 - 4t\} = \begin{cases} t, s \leq \frac{4}{5} \\ 4 - 4t, s \geq \frac{4}{5} \end{cases}$$

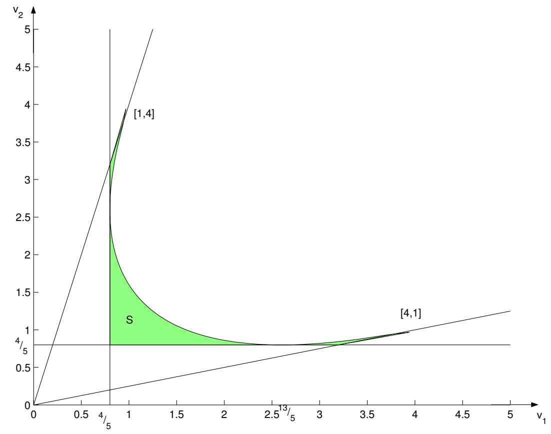


$\Rightarrow \underline{v_2} = \frac{4}{5}$ (wenn P_2 $t = \frac{4}{5}$ wählt, ist sein Gewinn $v_2 \geq \underline{v_2} = \frac{4}{5}$.)

Daß in unserem Beispiel $\underline{v_1} = \underline{v_2}$ gilt, ist zufällig. (Gewinne auf $[x^*, y^*]$ bzw. $[x^{**}, y^{**}]$ haben nichts direkt mit $\underline{v_1}$ bzw. $\underline{v_2}$ zu tun (liegt hier an der Symmetrie von H_1 und H_2).

Deshalb: Die Spieltheorie postuliert: Unabhängig davon, welches Lösungskonzept wir für das Spiel definieren, als Lösung kommen nur Entscheidungen in Frage, in denen P_1 nicht weniger als $\underline{v_1} = \frac{4}{5}$ und P_2 nicht weniger als $\underline{v_2} = \frac{4}{5}$ erhält.

Von der oben grau schraffierten Menge im Zielraum bleibt deshalb nur die Menge S übrig:



Die Frage ist, auf welchen Punkt $[v_1, v_2]$ aus S sollen sich P_1 und P_2 einigen. J. Nash entwickelte eine Reihe von Forderungen (Axiomen), welche der Kompromisspunkt $[\bar{v}_1, \bar{v}_2]$ erfüllen soll. Sein Konzept erlaubt eine eindeutige Auswahl.

Im weiteren wird das Entstehen der Menge S (z.B. in unserem Beispiel aus einem endlichen Spiel) ohne Belang sein. Wir gehen später nur davon aus, dass im $v_1 - v_2$-Raum eine Menge S - die Entscheidungsmenge, (aus der ein Element auszuwählen ist), gegeben ist. Dieses vorgegebene S wird als Verhandlungsmenge bezeichnet.

1.3 Konvexifizierung durch Randomisierung

Weiter unten wollen wir davon ausgehen, dass S konvex ist.

Zuvor zeigen wir, dass in der oben geschilderten Situation (in der das Spiel oft wiederholt wird) wir faktisch von unserem (i.a. nichtkonvexem) S zu einem konvexen S kommen.

Betrachten wir zuerst obiges Beispiel (Auseinandersetzung in der Ehe). Es sei folgendes Verhalten ausgehandelt: In der Hälfte der Fälle wird die GS $(2, 2)$ in der anderen Hälfte die GS $(1, 1)$ gewählt. Die Gewinne sind dann im Mittel

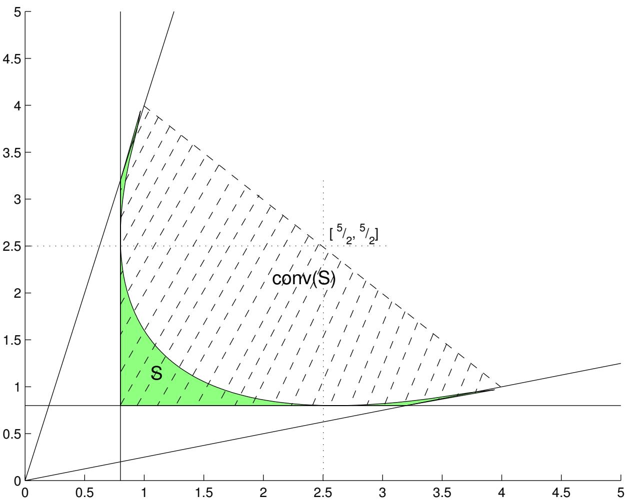
$$\frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}4 \text{ für } P_1$$

$$\frac{1}{2}4 + \frac{1}{2}1 \text{ für } P_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{mittlerer Gewinn } \frac{5}{2} \text{ für } P_1 \\ \text{mittlerer Gewinn } \frac{5}{2} \text{ für } P_2 \end{cases}$$

Damit sind im Spiel (bei häufigem Wiederholen) Gewinne möglich, die bei einfacher Realisierung nicht erreichbar sind (d.h. nicht in S).

$[v_1, v_2] = [\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]$ liegt nicht in S.



Definition. Sei $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H_1, H_2 \rangle$ ein nichtkooperatives 2- Personenspiel. Sei S die Menge der möglichen Gewinne von P_1 und P_2 in der gemischten Erweiterung $\hat{\Gamma}$ von Γ. Wir sagen, dass $\hat{\Gamma}$ randomisiert wurde, wenn von der Verhandlungsmenge S zur Verhandlungsmenge $conv(S)$ übergegangen wurde.

Bemerkung. Sei $[v_1, v_2] \in conv(S) \Rightarrow \exists \lambda \in [0,1], [\bar{v}_1, \bar{v}_2], [\bar{\bar{v}}_1, \bar{\bar{v}}_2] \in S$, so dass $[v_1, v_2] = \lambda[\bar{v}_1, \bar{v}_2] + (1-\lambda)[\bar{\bar{v}}_1, \bar{\bar{v}}_2]$. Wir können dann $[v_1, v_2]$ so deuten, daß P_1 und P_2 sich einigen, mit Wahrscheinlichkeit λ die gemischten Strategien zu spielen, die zu $[\bar{v}_1, \bar{v}_2]$ führen und mit Wahrscheinlichkeit $(1-\lambda)$ die Strategien (gemischten) zu spielen, die zu $[\bar{\bar{v}}_1, \bar{\bar{v}}_2]$ führen.

Wir definieren nunmehr die Verhandlungsmenge neu.

Definition. Es sei Γ ein nichtkooperatives 2-Personenspiel. Es sei

$$\begin{cases} v_1^0 = \max_{x \in \hat{S}_1} \min_{y \in \hat{S}_2} \hat{H}_1(x,y) \\ v_2^0 = \max_{y \in \hat{S}_2} \min_{x \in \hat{S}_1} \hat{H}_2(x,y) \end{cases}$$

(wobei v_1^0 = garantierter Mindestgewinn von P_1, v_2^0 = garantierter Mindestgewinn von P_2, in der gemischten Erweiterung $\hat{\Gamma}$ von Γ). Die Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ heißt Verhandlungsmenge in Γ, wenn folgendes gilt:

1. A - konvex,
2. A - kompakt,
3. $[v_1^0, v_2^0] \in A$,
4. $\exists [v_1, v_2] \in A : \begin{cases} v_1^0 < v_1 \\ v_2^0 < v_2 \end{cases}$

Bemerkung. 1. Wie A entsteht, wird nicht festgelegt, aber wenn wir wie oben als $A = conv(S)$ wählen, dann sind (1)(3) erfüllt, (2) wird erfüllt sein, wenn $\hat{H}_1(x,y)$ und $\hat{H}_2(x,y)$ auf $\hat{S}_1 \times \hat{S}_2$ beschränkt ist.

   Man kann auch eine Teilmenge von $conv(S)$ als A wählen, (2) z.B. dadurch erfüllen, dass S_1, S_2 kompakt, H_1, H_2 stetig oder S_1, S_2 endlich.

2. (4) besagt, dass nur solche Spiele von Interesse sind, in denen für beide Spieler ein Anreiz zum Verhandeln besteht: In A gibt es Punkte, in denen beide mehr als den Mindestgewinn erhalten.

   Wenn (4) nicht gilt, d.h. $\forall [v_1, v_2] \in A$ gilt

$$\begin{cases} v_1^0 < v_1 \\ v_2^0 < v_2 \end{cases}$$

   nicht, d.h. immer gilt wenigstens eine der Beziehungen

$$\begin{cases} v_1^0 < v_1 \\ v_2^0 \geq v_2 \end{cases}, \begin{cases} v_1^0 \geq v_1 \\ v_2^0 < v_2 \end{cases}, \begin{cases} v_1^0 \geq v_1 \\ v_2^0 \geq v_2 \end{cases}$$

   $\Rightarrow$ gibt dann immer wenigstens einen Spieler, der den Punkt $[v_1, v_2]$ ablehnen wird $\Rightarrow$ können sich nicht einigen.

3. (3) sichert, daß im Falle der Nichteinigung auf dem Verhandlungswege sich die Spieler wenigstens an ihre Sicherheitsstrategien halten können (die ihnen den garantierten Mindestgewinn sichern).

4. Der Zweig der Spieltheorie, der von solch einer Verhandlungsmenge ausgeht, untersucht die Frage, welchen Punkt aus A kann man als Lösung ansehen.

   Dafür gibt es unterschiedliche Konzepte. Ein Konzept festzulegen heißt, eine Abbildung φ zu beschreiben, die einem Punkt $[v_1^0, v_2^0] \in \mathbb{R}^2$ und einer Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ mit den Eigenschaften (1)-(4) wenigstens einen Punkt $[v_1^*, v_2^*] \in A$ zuordnet (der dann als Lösung angesehen wird).

   Ein Verhandlunskonzept muß für alle Spiele eine Vorgehenweise festlegen, nicht nur für ein konkretes Spiel $\Rightarrow$ führen $\mathfrak{A}$ ein.

   Betrachtet werden hauptsächlich Konzepte, in denen φ eine Funtion ist (d.h. Bildmenge der Abbildung ist einelementig).

5. Das Paar $v^0 = [v_1^0, v_2^0]$ wird allgemein als status quo bezeichnet. Bei uns waren es bisher die Mindestgewinne von P_1 bzw. P_2.

Definition. Es sei $\mathfrak{A} = \{[v^0, A] : v^0 \in \mathbb{R}^2, A \subset \mathbb{R}^2, (1) - (4) gilt\}$.

Bemerkung. 1. $\mathfrak{A}$ ist quasi die Menge aller Verhandlungsmengen mit ihren zugehörigen Mindestgewinnen.

2. Wir können uns $\mathfrak{A}$ aus der Betrachtung aller möglichen nichtkooperatives 2-Personen-Spiele entstanden denken.

Definition. Eine Verhandlungslösung ist eine Funktion $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^2$, die jedem Paar $[v^0, A] \in \mathfrak{A}$ (d.h. jedem 2-Personenspiel) ein Element $\varphi(v^0, A) \in A$ zuordnet.

Wir wollen das auf J.Nash zurückgehende Konzept betrachten. Er formulierte eine Reihe Axiome, die φ erfüllen soll und zeigte, dass φ durch sein Axiomensystem eindeutig definiert ist.

Bemerkung. Frage in einem Buch: Welche Beziehung besteht zwischen der Nash-GS und der Nash-Verhandlungslösung?

Antwort: Keine, außer daß beide auf John Nash zurückgehen.

1.4 Die Nash-Verhandlungslösung

Seien $\mathfrak{A}$ und φ wie oben definiert.

1. Axiom: Schwache individuelle Rationalität

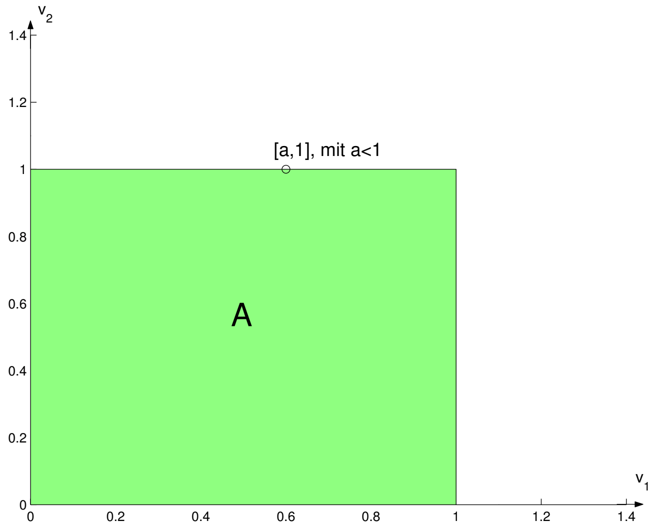
   $\forall [v_0, A] \in \mathfrak{A}$ sei $\varphi(v_0, A) \geq v_0$. Diese vektorielle Ungleichung soll komponentenweise gelten (d.h. wenn $v_0 = [v_1^0, v_2^0]$, $\varphi(v_0, A) = [v_1, v_2]$, so sei $v_1 \geq v_1^0$, $v_2 \geq v_2^0$.

   Bemerkung. Das Axiom ist unumstritten: Die Verhandlungslösung ordnet jedem einen Gewinn zu,der nicht schlechter ist, als individuell immer drin ist.

2. Axiom: Schwache Pareto-Optimalität

   $\forall [v_0, A] \in \mathfrak{A}$ gelte: $\nexists y \in A$ so dass $\varphi(v_0, A) < y$(in beiden Komponenten)(d.h. wenn für ein $y \in \mathbb{R}^2$ gilt $\varphi(v_0, A) < y$, dann ist $y \notin A$).

   Bemerkung. Diese Axiom verlangt also, dass die Verhandlungslösung $\varphi(v_0, A)$ sich nicht für beide Spieler verbessern lässt. Aber in folgenender Situation



$\varphi(v_0, A) = [v_1, v_2] = [a, 1]$, mit $a < 1$

erfüllt dieses $\varphi(v_0, A)$ das Axiom für unser A, obwohl sicher $\hat{\varphi} = (1, 1)$ als Funktionswert für φ erwünscht ist.

$\Rightarrow$ Das Axiom ist nicht von jedem anerkannt.

3. Axiom: Schwache Symmetrie

   Wir sagen, dass $[v_0, A] \in \mathfrak{A}$ eine symmetrische Verhandlungssituation ist, wenn gilt
   $$\begin{cases} v^0 = [v_1^0, v_2^0], \text{ mit } v_1^0 = v_2^0, \\ v = [v_1, v_2] \in A \Leftrightarrow [v_2, v_1] \in A \end{cases}$$

   Das 3.Axiom fordert nun, dass für jede solche Verhandlungssituation auch die Verhandlungslösung $\varphi(v^0, A)$ symmetrisch ist, d.h. für $v^* = [v_1^*, v_2^*] = \varphi(v^0, A)$ gilt $v_1^* = v_2^*$.

   Bemerkung. Für nichtsymmetrische $[v_0, A] \in \mathfrak{A}$ fordert das Axiom nichts.

4. Axiom: Unabhängigkeit von positiven linearen Transformationen

   Es seien
   $$\begin{cases} c_1 > 0, c_2 > 0 \\ d_1, d_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

   Es sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wie folgt definiert $T(v_1, v_2) = [c_1 v_1 + d_1, c_2 v_2 + d_2]$. (z.B. c_i - Änderung des Geldmaßstabes, d_i - Verschiebung des Ursprungs, z.B. Übergang vom Rechnen in Mark zu Euro).

   Das 4.Axiom sei erfüllt, wenn für beliebiges T und beliebiges $[v_0, A] \in \mathfrak{A}$ gilt
   $$\varphi(T(v^0), T(A)) = T(\varphi(v^0, A)).$$

Bemerkung. (a) Aus $[v_0, A] \in \mathfrak{A}$ folgt stets dass $[T(v_0), T(A)] \in \mathfrak{A}$ (d.h. wenn $[v_0, A]$ die 4 Bedingungen aus der Definition einer Verhandlungsmenge erfüllt, dann auch $[T(v_0), T(A)]$).

(b) Das Axiom verlangt, dass φ dem Element $[T(v_0), T(A)]$ gerade das Bild von $\varphi(v^0, A)$ zuordnet, d.h. z.B. Verschiebung des Ursprungs und Geldmaßstabänderung nur bewirken, dass sich die Lösung genauso verschiebt (d.h. faktisch keine Auswirkung auf die Entscheidung haben).

(c) Es gibt experimentelle Untersuchungen von Psychologen, aus denen folgt, daß die Individuen häufig gegen das Axiom verstoßen $\Rightarrow$ Das Axiom ist umstritten.

5. Axiom: Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen

$\forall [v_0, B], [v_0, A] \in \mathfrak{A}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{cases} B \subset A \\ \varphi(v^0, A) \in B \end{cases}$$

gilt $\varphi(v^0, A) = \varphi(v^0, B)$.

Bemerkungen.

(a) Da $\varphi(v^0, A)$ per Defintion in A und $\varphi(v^0, B)$ in B liegen muss, so verlangt das Axiom bei $B \subset A$ faktisch, daß entweder $\varphi(v^0, A) \in A \setminus B$ oder $\varphi(v^0, A) = \varphi(v^0, B)$ ist (ist mehr als nach der Definition von φ gefordert).

(b) Die Forderung des Axioms ist z.B. bei Optimierungsaufgaben erfüllt. Genauer, wenn

$$\begin{cases} f(x) \to \min \\ x \in A \end{cases}$$

eine optimale Lösung x^* hat und $x^* \in B$, wobei $B \subset A$, dann hat

$$\begin{cases} f(x) \to \min \\ x \in B \end{cases}$$

die optimale Lösung x^*.

(c) Das 5.Axiom lässt nicht zu, dass $\varphi(v^0, A) \in A \cap B$, aber $\varphi(v^0, A) \neq \varphi(v^0, B)$.

Die Forderung des 5. Axioms ist durchaus nicht unumstritten.

Satz 1.1 (Nash, 1950). *Es gibt genau eine Verhandlungslösung φ_N, die den Nash-Axiomen 1-5 gemägt.*

Der Beweis wird kostruktiv sein. Um Beispiele im Sinne von Nash lösen zu können, wollen wir auf den Beweis eingehen. Vorher beweisen wir Hilfsaussagen.

Hilfssatz 1.2. *Es sei* $[v_0, A] \in \mathfrak{A}$. *Dann gibt es genau einen Punkt* $a^* = [a_1^*, a_2^*] \in A$, *welcher die Funktion* $g(a_1, a_2) = (a_1 - v_1^0)(a_2 - v_2^0)$ *über* $a \geq v^0$ *maximiert, d.h. die Aufgabe* $\max\{g(a) : a \in A, a \geq v^0\}$ *ist lösbar und ihre Lösung ist eindeutig.*

Beweis. 1. Da $A \neq \emptyset$ (weil $v^0 \in A$) und A kompakt sind, so ist $\max\{g(a_1, a_2) : [a_1, a_2] \in A\}$ endlich und wird angenommen (da g stetig).

Außerdem muss das Maximum > 0 sein (da in A ein a mit $a_1 > v_1^0, a_2 > v_2^0$ existiert.)

2. Nehmen wir entgegen dem zu Beweisenden an, es gäbe 2 Punkte, $a' = [a_1', a_2'], a'' = [a_1'', a_2'']$, die das Maximum realisieren:

$$M = g(a') = g(a'') > 0 \tag{1.4.1}$$

Wäre $a_1' = a_1''$, so wäre $(a_1' - v_1^0)(a_2' - v_2^0) = (a_1'' - v_1^0)(a_2'' - v_2^0)$, d.h. es wäre $(a_2' - v_2^0) = (a_2'' - v_2^0)$ ($M > 0$, d.h. kürzen nicht mit 0), d.h. es wäre $a_2' = a_2'' \Rightarrow a' = a'' \Rightarrow$ Widerspruch.

O.E.d.A. sei $a_1' < a_1'' \Rightarrow a_1' - v_1^0 < a_1'' - v_1^0$. Nach (1.4.1) ist dann $a_2' - v_2^0 > a_2'' - v_2^0 \Rightarrow a_2' > a_2'' \Rightarrow$

wir haben

$$\begin{aligned} a_1' &< a_1'', \\ a_2' &> a_2''. \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

3. Da A konvex ist, so muss $\tilde{a} = \frac{1}{2}a' + \frac{1}{2}a'' \in A$ sein. Nun ist aber

$$\begin{aligned} g(\tilde{a}) &= (\frac{a_1' + a_1''}{2} - v_1^0)(\frac{a_2' + a_2''}{2} - v_2^0) \\ &= \frac{(a_1' - v_1^0) + (a_1'' - v_1^0)}{2} \frac{(a_2' - v_2^0) + (a_2'' - v_2^0)}{2} \\ &= \frac{1}{4}[(a_1' - v_1^0)(a_2' - v_2^0) + (a_1'' - v_1^0)(a_2'' - v_2^0) + a_1' a_2'' - a_1' v_2^0 \\ &\quad - a_2'' v_1^0 + v_1^0 v_2^0 + a_1'' a_2' - a_1'' v_2^0 - a_2' v_1^0 + v_1^0 v_2^0] \end{aligned}$$

in [ ] Klammern hinzufügen $-a_1' a_2' - a_1'' a_2'' + a_1' a_2' + a_1'' a_2''$.

$$\begin{aligned} g(\tilde{a}) &= \frac{1}{2}(a_1' - v_1^0)(a_2' - v_2^0) + \frac{1}{2}(a_1'' - v_1^0)(a_2'' - v_2^0) \\ &\quad + \frac{1}{4}[a_1' a_2'' + a_1'' a_2' - a_1' a_2' - a_1'' a_2''] \\ &= \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M + \frac{1}{4}(a_1' - a_1'')(a_2'' - a_2') > M \end{aligned}$$

Die strenge Ungleichheit gilt nach (1.4.2). $\Rightarrow$Widerspruch.

$\Rightarrow$ gibt keine 2 Punkte, die Maximum realisieren.

$\square$

Hilfssatz 1.3. *Es sei $[v_0, A] \in \mathfrak{A}$. Es sei $a^* \in A$ der nach Hilfsatz 1.2 eindeutig existierende Maximumspunkt von $g(a)$. Dann ist a^* auch optimale Lösung der Aufgabe*

$$\max\{h(a) : a \in A, a \geq v^0\},$$

wobei

$$\begin{cases} h(a) = (a_2^* - v_2^0)a_1 + (a_1^* - v_1^0)a_2 \\ a = [a_1, a_2] \end{cases}$$

Beweis. Entgegen dem zu Beweisenden existiere ein $a \in A$ mit

$$h(a) > h(a^*). \tag{1.4.3}$$

Da A konvex ist, so gilt für beliebiges $\lambda \in [0,1]$, dass $\hat{a} = \lambda a + (1-\lambda)a^* \in A$ und $\hat{a} \geq v^0$. Wir haben:

$$\begin{aligned} g(\hat{a}) &= g(\lambda a_1 + (1-\lambda)a_1^*, \lambda a_2 + (1-\lambda)a_2^*) \\ &= g(a_1^* + \lambda(a_1 - a_1^*), a_2^* + \lambda(a_2 - a_2^*)) \\ &= [a_1^* + \lambda(a_1 - a_1^*) - v_1^0][a_2^* + \lambda(a_2 - a_2^*) - v_2^0] \\ &= (a_1^* - v_1^0)(a_2^* - v_2^0) + \lambda(a_1^* - v_1^0)(a_2 - a_2^*) \\ &\quad + \lambda(a_1 - a_1^*)[a_2^* + \lambda(a_2 - a_2^*) - v_2^0] \\ &= g(a^*) + \lambda(a_1 - a_1^*)(a_2^* - v_2^0) + \lambda(a_1^* - v_1^0)(a_2 - a_2^*) \\ &\quad + \lambda^2(a_1 - a_1^*)(a_2 - a_2^*) \\ &= g(a^*) + \lambda h(a - a^*) + \lambda^2(a_1 - a_1^*)(a_2 - a_2^*) \\ &= g(a^*) + \lambda(h(a) - h(a^*)) + \lambda^2(a_1 - a_1^*)(a_2 - a_2^*) \end{aligned}$$

Nach Annahme (1.4.3) ist $h(a) - h(a^*) > 0$. Wir wählen nun λ so, daß

$$0 < \lambda < \min\{1, \frac{h(a) - h(a^*)}{|a_1 - a_1^*||a_2 - a_2^*|}\}.$$

Dann ist wegen $((a_1 - a_1^*)(a_2 - a_2^*) \geq -|a_1 - a_1^*||a_2 - a_2^*|)$

$$\lambda(h(a) - h(a^*)) + \lambda^2(a_1 - a_1^*)(a_2 - a_2^*) \geq \lambda[(h(a) - h(a^*) - \lambda|a_1 - a_1^*||a_2 - a_2^*|] > 0.$$

Für dieses λ gilt also $g(\hat{a}) > g(a^*) = M \Rightarrow$ Widerspruch. $\Rightarrow \forall a \in A, a \geq v^0$ ist $h(a) \leq h(a^*)$. □

Bemerkung. Hilfssatz 1.3 behauptet nicht, dass a^* einziger Maximumspunkt von h ist.

Beweis von Satz 1.1. 1. Nach Hilfssatz 1.2 existiert zu jedem $[v_0, A] \in \mathfrak{A}$ eindeutig ein $a^* \in A$, welches $\max\{g(a) : a \in A, a \geq v^0\}$ löst. Damit ist eine Funktion $\varphi_N : \mathfrak{A} \to A$ erklärt ($\varphi_N(A) = a^*$).

Wir zeigen zuerst, daß dieses φ_N alle 5 Axiome erfüllt. Anschließend zeigen wir, daß außer φ_N keine weitere Funktion $\varphi : \mathfrak{A} \to A$ die 5 Axiome erfüllt.

2. φ_N erfüllt die 5 Axiome:

   (a) Da $g(a^*) > 0$ wie oben gezeigt, so ist $(a_1^* - v_1^0)(a_2^* - v_2^0) > 0$, d.h. $a^* > v^0 \Rightarrow a^* = \varphi_N(v^0, A) \geq v^0 \Rightarrow$ 1.Axiom erfüllt.

   (b) Sei $y \in \mathbb{R}^2$, wobei $y > a^*$. Wäre $y \in A$, so wäre $g(y) \leq g(a^*)$. Nun ist aber

   $$g(y) = (y_1 - v_1^0)(y_2 - v_2^0) > (a_1^* - v_1^0)(a_2^* - v_2^0) = g(a^*)$$

   $(y_1 > a_1^*, y_2 > a_2^*) \Rightarrow y \notin A \Rightarrow a^*$ ist Pareto-optimal bei $\varphi_N(v^0, A) = a^* \Rightarrow$ 2.Axiom gilt.

   (c) Sei $[v^0, A] \in \mathfrak{A}$ eine symmetrische Verhandlungssituation, d.h.

      i. (1)$v_1^0 = v_2^0$,

      ii. (2) wenn $v = [v_1, v_2] \in A$, dann ist auch $[v_2, v_1] \in A$.

   Wir müssen zeigen, dass in $a^* = [a_1^*, a_2^*]$ gilt: $a_1^* = a_2^*$.
   Laut Voraussetzung ist neben $a^* \in A$ auch $\hat{a} = [a_2^*, a_1^*] \in A$.
   Da $v_1^0 = v_2^0$, so ist dann

   $$g(\hat{a}) = (a_2^* - v_1^0)(a_1^* - v_2^0) = (a_2^* - v_2^0)(a_1^* - v_1^0) = g(a^*).$$

   $\Rightarrow$ nach Hilfssatz 1.2 ist a^* eindeutig, d.h. $\hat{a} = a^* \Rightarrow a_1^* = a_2^*$.

   (d) Sei $T([v_1, v_2]) = [c_1 v_1 + d_1, c_2 v_2 + d_2]$, wobei $c_1 > 0, c_2 > 0$.
   Wir setzen

   $$\begin{aligned} \tilde{g}(a) &= (c_1 a_1 + d_1 - (c_1 v_1^0 + d_1))(c_2 a_2 + d_2 - (c_2 v_2^0 + d_2)) \\ &= c_1 c_2 (a_1 - v_1^0)(a_2 - v_2^0) \\ &= c_1 c_2 g(a) \end{aligned}$$

   $\Rightarrow \max\{\tilde{g}(a) : a \in A, a \geq v^0\}$ hat die gleiche Lösung wie $\max\{g(a) : a \in A, a \geq v^0\} \Rightarrow$ erstere hat auch a^*(weil letztere a^* als Lösung hat.) $\Rightarrow$ zu $[T(v^0), T(A)]$ gehört die Lösung $[c_1 a_1^* + d_1, c_2 a_2^* + d_2] = T(a^*) \Rightarrow \varphi_N(T(v^0), T(A)) = T(a^*) = T(\varphi_N(v^0, A)) \Rightarrow$ 4.Axiom gilt.

   (e) Sei

   $$\begin{cases} B \subset A \\ a^* = \varphi_N(v^0, A) \in B \end{cases}$$

   Zu zeigen ist $\varphi_N(v^0, A) = \varphi_N(v^0, B)$.
   Wir haben

   $$\begin{aligned} g(a^*) = g(\varphi_N(v^0, A)) &= \max\{g(a) : a \in A, a \geq v^0\} \\ &= \max\{g(a) : a \in B, a \geq v^0\} \end{aligned}$$

   Bei $a^* \in B \subset A$. $\Rightarrow \varphi_N(v^0, B) = a^*$.

3. Außer φ_N erfüllt kein anderes φ die 5 Axiome.

(a) Nehmen wir an, dass entgegen dem zu Beweisendes neben φ_N es wenigstens noch eine Lösung φ der 5 Axiome gibt. Dann muß es wenigstens ein Paar $[v^0, A] \in \mathfrak{A}$ gegeben, bei dem

$$\varphi(v^0, A) \neq \varphi_N(v^0, A) \tag{1.4.4}$$

ist.
Wie früher bezeichnen wir $a^* = [a_1^*, a_2^*] = \varphi_N(v^0, A)$. Sei h die in Hilfssatz 1.3 eingeführte Funktion. Wir setzen

$$H' := \{[a_1, a_2] \in \mathbb{R}^2 : h(a) \leq h(a^*)\}.$$

Wir setzen

$$c_1 := \frac{1}{a_1^* - v_1^0}, \qquad c_2 := \frac{1}{a_2^* - v_2^0}$$
$$d_1 := -\frac{v_1^0}{a_1^* - v_1^0} \qquad d_2 := -\frac{v_2^0}{a_2^* - v_2^0}$$

und $T(a) := [c_1 a_1 + d_1, c_2 a_2 + d_2]$.
Nach Eigenschaft (4) einer Verhandlungsmenge ist T eine positive lineare Transformation. Wir haben

$$\begin{aligned}
T(H') &= \{[\frac{a_1 - v_1^0}{a_1^* - v_1^0}, \frac{a_2 - v_2^0}{a_2^* - v_2^0}] : h(a) \leq h(a^*)\} \\
&= \{[\frac{a_1 - v_1^0}{a_1^* - v_1^0}, \frac{a_2 - v_2^0}{a_2^* - v_2^0}] : \\
&\quad (a_2^* - v_2^0)a_1 + (a_1^* - v_1^0)a_2 \leq (a_2^* - v_2^0)a_1^* + (a_1^* - v_1^0)a_2^*\} \\
&= \{[\frac{a_1 - v_1^0}{a_1^* - v_1^0}, \frac{a_2 - v_2^0}{a_2^* - v_2^0}] : \\
&\quad (a_2^* - v_2^0)(a_1 - v_1^0) + (a_1^* - v_1^0)(a_2 - v_2^0) \\
&\qquad\qquad \leq 2(a_1^* - v_1^0)(a_2^* - v_2^0)\} \\
&= \{[\frac{a_1 - v_1^0}{a_1^* - v_1^0}, \frac{a_2 - v_2^0}{a_2^* - v_2^0}] : \frac{a_1 - v_1^0}{a_1^* - v_1^0} + \frac{a_2 - v_2^0}{a_2^* - v_2^0} \leq 2\} \\
&= \{[b_1, b_2] \in \mathbb{R}^2 : b_1 + b_2 \leq 2\}.
\end{aligned}$$

(weil $a = [a_1, a_2]$ beliebig am $\mathbb{R}^2$)

(b) Wir setzen nun $H := H' \cap \{[a_1, a_2] \in \mathbb{R}^2 : a_1 \geq v_1^0, a_2 \geq v_2^0\}$. Wir haben $T(v^0) = [0, 0]$ $(a = v^0)$. Wir wollen uns überzeugen, dass $[T(v^0), T(H)]$ eine symmetrische Verhandlungssituation ist. $\Rightarrow T(v^0)$ ist symmetrisch, d.h. es bleibt nur zu überprüfen: wenn $v = [v_1, v_2] \in T(H)$, dann ist auch $[v_2, v_1] \in T(H)$.
Da $T(H) = T(H') \cap \{T(a) = [b_1, b_2] \in \mathbb{R}^2 : [a_1, a_2] \geq v^0\}$, d.h.

$$T(H) = \{[b_1, b_2] \in \mathbb{R}^2 : b_1 + b_2 \leq 2\} \bigcap \{[b_1, b_2] \in \mathbb{R}^2 : [b_1, b_2] \geq T(v^0) = 0\},$$

so folgt aus $[v_1, v_2] \in T(H)$, dass

$$\begin{cases} v_1 + v_2 \leq 2 \\ v_1 \geq 0 \\ v_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 + v_1 \leq 2 \\ v_2 \geq 0 \\ v_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow [v_2, v_1] \in T(H)$$

(c) Da φ das 3.Axiom (Schwache Symmetrie) erfüllt, muss $\varphi(T(v^0), T(H))$ symmetrisch sein, d.h. es muss $\varphi(T(v^0), T(H)) \subset D := \{[x,x] : x \in \mathbb{R}\}$ gelten.
Da φ auch das 2.Axiom (Schwache Pareto-Optimalität) erfüllt, so muss $\varphi(T(v^0), T(H)) = [1,1]$ sein. ($\nexists y \in T(H) : \varphi(T(v^0), T(H)) < y,\ \varphi(T(v^0), T(H)) \in T(H)$)
Da T eine positive Lineartransformation ist, so gilt nach dem 4.Axiom $\varphi(T(v^0), T(H)) = T(\varphi(v^0, H))$, d.h. $[1,1] = T(\varphi(v^0, H))$.

$$\Rightarrow T^{-1}([1,1]) = T^{-1}T(\varphi(v^0, H)) = \varphi(v^0, H)$$

Nun ist aber $T(a^*) = T([a_1^*, a_2^*]) = [1,1] \Rightarrow T^{-1}([1,1]) = a^*$. $\Rightarrow \varphi(v^0, H) = a^* \in A \subset H \subset H'$ (Def von a^* als Lösung, die φ_N dem Paar $[v^0, A]$ zuordnet)
Nach dem 5.Axiom ($A \subset H, \varphi(v^0, H) \in A$) muss dann aber gelten $\varphi(v^0, A) = \varphi(v^0, H)$.
Bei $a^* = \varphi_N(v^0, A), a^* = \varphi(v^0, H) \Rightarrow \varphi(v^0, A) = \varphi_N(v^0, A) \Rightarrow$ Widerspruch zu (1.4.4).

$\square$

Man kann sich die Einigung der beiden Spieler auf die Verhandlungslösung als einen 3-Stufen Prozess vorstellen

1. Zuallererst kommen die Spieler überein, eine Lösung anzustreben, die die Nash-Axiome erfüllt,
2. Anschließend wählen beide je eine Droh-Strategie, die den Status quo festlegen,
3. Schließlich wird die Nash-Lösung $v^* = [v_1^*, v_2^*]$ berechnet (und evtl. die dahinterstehenden Strategien, wenn ursprünglich von einem nichtkooperativen Spiel ausgegangen wurde).

Definition. Die nach Satz 1.1 existierende Lösung φ_N heißt Nash'sche Verhandlungslösung.

1.5 Beispiele

1.5.1 Streit in der Ehe

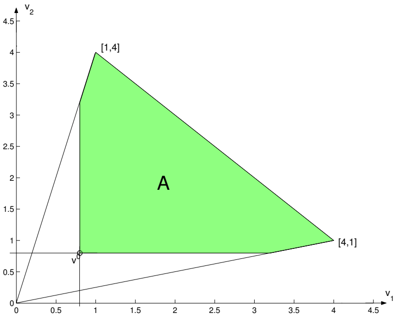
Dem Bimatrixspiel mit den Matrizen

$$H_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

hatten wir (vgl. Abschnitte 1.2,1.3) das Paar $[v^0, A]$ mit

$$\begin{cases} v^0 = [\frac{4}{5}, \frac{4}{5}] \\ A = conv(S) \end{cases}$$

zugeordnet.



Um die Nash'sche Verhandlungslösung zum Paar $[v^0, A]$ zu berechnen, müssen wir (vgl Hilfssatz 1.2 und Beweis von Satz 1.1) das Problem $\max\{g(a) : a \in A, a \geq v^0\}$ mit $g(a) = (a_1 - v_1^0)(a_2 - v_2^0)$ lösen, d.h. wir müssen $(a_1 - \frac{4}{5})(a_2 - \frac{4}{5})$ über A maximieren.

$g(a) = const$ sind Hyperbeln und da a^* Schwach Pareto-optimal sein muss, so muss offensichtlich die Lösung a^* auf der durch $[4, 1]$ und $[1, 4]$ gehenden Geraden liegen. Ihre Gleichung ist

$$\frac{a_2 - 4}{a_1 - 1} = \frac{1 - 4}{4 - 1} = -1$$

$\Rightarrow a_2 - 4 = 1 - a_1 \Rightarrow a_2 = 5 - a_1$

$$g(a) = (5 - a_1 - \frac{4}{5})(a_1 - \frac{4}{5}),\ 1 \leq a_1 \leq 4$$

$$g(a) = (\frac{21}{5} - a_1)(a_1 - \frac{4}{5}) = \frac{21}{5}a_1 + \frac{4}{5}a_1 - a_1^2 - \frac{84}{25} = 5a_1 - a_1^2 - \frac{84}{25}$$

$$g'(a) = 5 - 2a_1,\ g'(a) = 0 \text{ bei } a_1 = \frac{5}{2}, \Rightarrow a_2 = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

$\Rightarrow \max\{g(a) : a \in A\} = \max\{g([4,1]), g([\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]), g([1,4])\} = \max\{\frac{16}{25}, (\frac{17}{10})^2, \frac{16}{25}\} = (\frac{17}{10})^2$

$\Rightarrow a^* = [\frac{5}{2}, \frac{5}{2}] = \frac{1}{2}[4,1] + \frac{1}{2}[1,4]$ (GS[1,1]$\hat{=}[4,1]$,GS[2,2]$\hat{=}[1,4]$) $\Rightarrow a^*$ wird aus der Randomisierung erzeugt, in dem in der Hälfte der Fälle die GS[1,1](beide gehen zum Fußball) und der Hälfte der Fälle die GS[2,2](beide gehen ins Theater) gewählt wird $\Rightarrow$ Nash-Konzept schlägt was Vernünftiges als Vereinbarung vor.

Die gemischten optimalen Strategien sind:

$$\begin{cases} x^* = [\frac{4}{5}, \frac{1}{5}] \\ y^* = [\frac{1}{5}, \frac{4}{5}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1^* =< x^*, H_1 y^* >= \frac{4}{5} \\ v_2^* =< x^*, H_2 y^* >= \frac{4}{5} \end{cases}$$

$\Rightarrow v^* = v^0$ =Garantiepunkt für beide Spieler ist schlechter als die Nash-Verhandlungslösung ($\frac{4}{5}$ anstelle $\frac{5}{2}$).

1.5.2 Beispiel 2

Bei den Bimatrixspielen hatten wir das Mutprobespiel " Chicken" betrachtet:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{abweichen} \\ \leftarrow \text{nicht abweichen} \end{matrix}$$

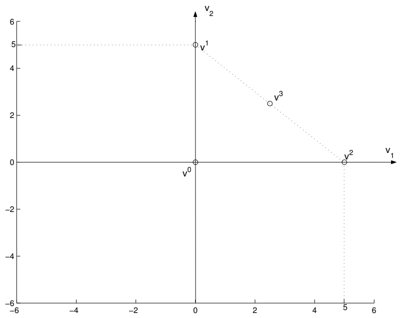
Was sagte die nichtkooperative Theorie? Es sind keine Absprachen erlaubt. Es gibt 2 GS in reinen Strategien

$$\begin{matrix} [1,2] \rightarrow v^1 = [0,5] \\ [2,1] \rightarrow v^2 = [5,0] \end{matrix}$$

und es gibt eine GS in gemischten Strategien:

$$\left. \begin{matrix} x^* = [\frac{5}{6}, \frac{1}{6}] \\ y^* = [\frac{5}{6}, \frac{1}{6}] \end{matrix} \right\} \rightarrow v^3 = [\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]$$

Um das Nash-Verhandlungskonzept anzuwenden, stellen wir die möglichen Gewinne im Gewinn-Raum dar:



Der Garantiepunkt ist $v^0 = [0,0]$.

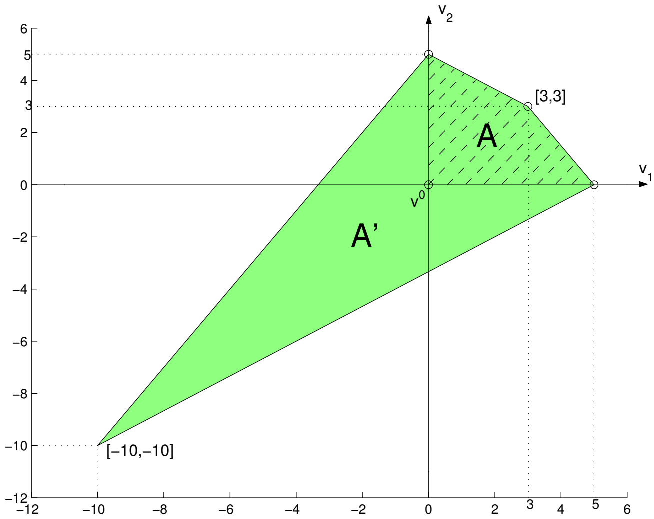
Berechnen des Garantiepunktes: $\max_i \min_j h_{ij}^1$.

$\min_j h_{ij}^1$ =Zeilenminima von $H_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \max_i \min_j h_{ij}^1 = 0$

Analog bei H_2 $\max_j \min_i h_{ij}^2 = 0$

Wir wollen zur Verhandlungsmenge A wie folgt kommen: Betrachten die konvexe Hülle der möglichen Situationen in reinen Strategien im Spiel:

$$[3,3], [0,5], [5,0], [-10,-10].$$



Eigenschaften (1)-(4) für Verhandlungsmenge sind erfüllt.
Das Nash-Konzept verlangt:

$$\begin{cases} (a_1 - v)(a_2 - v) \to \max \\ a \in A' \cap \{a : a \geq v^0\} = A \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Lösung $a^* = [3,3]$ entspricht: Die Spieler sollen sich auf folgendes Verhalten einigen:

$$\begin{cases} P_1 \text{ wähle Zeile 1 (abweichen)} \\ P_2 \text{ wähle Spalte 1 (abweichen)} \end{cases}$$

Dagegen empfehlen die oben erwähnten 3 GS v^1, v^2, v^3 des nichtkooperativen Spiels:

	P_1	P_2
v^1	abweichen	nicht abweichen
v^2	nicht abweichen	abweichen
v^3	in $\frac{1}{6}$ der Fälle abweichen	in $\frac{1}{6}$ der Fälle abweichen

1.5.3 Beispiel 3

Das Beispiel soll zeigen, dass das Nash-Konzept auch anwendbar ist, wenn $[v^0, A]$ nicht aus einem Bimatrixspiel entstanden ist.

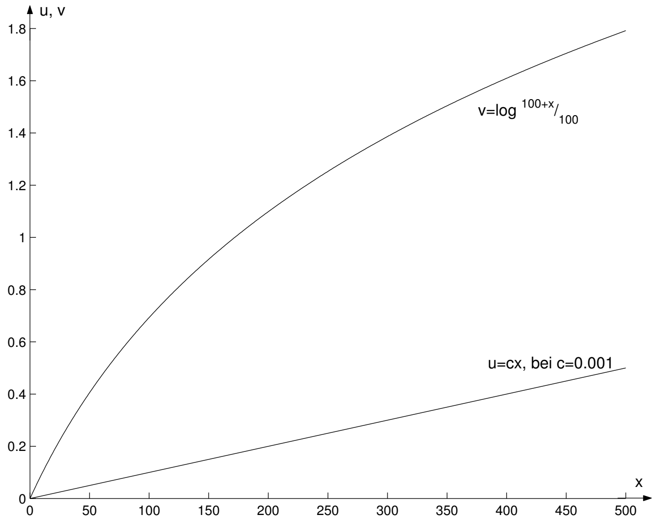
Zwei Männern P_1 und P_2 wird eine Gesamtsumme von DM 500.- angeboten, falls sie sich über deren Aufteilung einigen können. Andernfalls bekommen beide nichts.

Der erste Mann ist sehr reich. Der Nutzen eines Betrages x DM ist für ihn $u = cx$, wobei $c > 0$, c - klein.

Der zweite Mann besitzt gerade mal DM 100,-. Für ihn habe ein Betrag von DM x den Nutzen

$$v = \log \frac{100 + x}{100} = \log(100 + x) - \log 100$$

(Gesetze aus der Psychologie.)

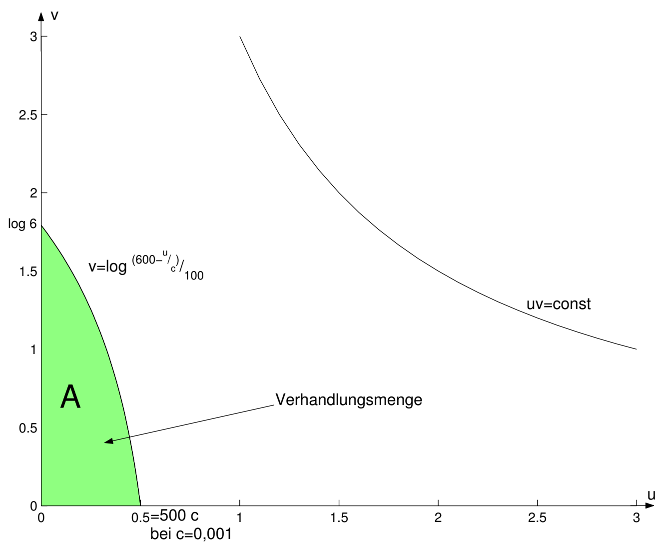


Wir streben die Lösung mit Nash-Verhandlungskonzept an $[u, v] \widehat{=} [v_1, v_2]$, Status quo $[u^0, v^0] = [0, 0] \widehat{=}$ Fall, dass sie sich nicht einigen. Nehmen wir an, P_1 erhält x und P_2 $500 - x$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Nutzen für } P_2 \ v = \log \frac{600-x}{100} \\ \text{Nutzen für } P_1 \ u = cx \end{cases} \Rightarrow v = \log \frac{600 - \frac{u}{c}}{100}$$

Als Verhandlungsmenge in der $[u, v]$ - Ebene wählen wir

$$conv(\{[u, v] \in \mathbb{R}^2 : u \geq u^0 = 0, v \geq v^0 = 0\} \cap (\text{Bogen mit der Gleichung } v = \log \frac{600 - \frac{u}{c}}{100})).$$



Nach Beweis Satz 1.1 wissen wir, dass das Nash-Konzept aus der Verhandlungsmenge das Element auswählt, welches die optimale Lösung von

$$\begin{cases} g(u,v) = (u-u^0)(v-v^0) = uv \to \max \\ [\,u,v] \in A \end{cases} \tag{1.5.1}$$

liefert.

Da die Niveaulinien der ZF Hyperbeln sind, so erreicht (1.5.1) die optimale Lösung auf der Randkurve $\Rightarrow$ im Optimum ist $uv = u\log\frac{600-\frac{u}{c}}{100}$ $\Rightarrow$ Anstelle (1.5.1) können wir

$$\begin{cases} u\log\frac{600-\frac{u}{c}}{100} \to \max \\ 0 \le u \le 500c \end{cases} \tag{1.5.2}$$

lösen.

Bei $u = 0$ und $u = 500c$ ist der ZF-wert gleich Null, bei $0 < u < 500c$ ist der ZF-wert positiv $\Rightarrow$ Maximum wird im Inneren des Abschnittes $[0, 500c]$ erreicht $\Rightarrow$ im Maximum-Punkt muss Ableitung der Zielfunktion gleich Null sein $\Rightarrow$ optimale Lösung u^* von (1.5.2) ist Lösung der Gleichung

$$\log\frac{600-\frac{u}{c}}{100} + u\frac{-\frac{1}{100c}100}{600-\frac{u}{c}} = 0,$$

d.h. der Gleichung

$$\frac{\frac{u}{c}}{600-\frac{u}{c}} = \log\frac{600-\frac{u}{c}}{100}$$

$\Rightarrow$ $\frac{u^*}{c} = 390.60$ ist einzige Lösung $\Rightarrow$ P_1 erhält $x = \frac{u^*}{c} = 390.60$ DM

P_2 erhält $500 - x = 109.40$ DM.

Die bekannte Regel: "Die Reichen werden reicher, die Armen werden ärmer" wird durch das Nash-Konzept bestätigt.

Kapitel 2

Kooperative n-Personenspiele

2.1 Das Konzept der charakteristischen Funktion

2.1.1 Einleitende Bemerkungen

In den nichtkooperativen Spielen ist es durch die Spielregeln nicht erlaubt

- dass Absprachen zwischen den Spielern über die Wahl der Strategien getroffen werden,

- dass vor oder nach dem Spiel Zahlungen (Umverteilungen der Gewinne) zwischen den Spielern vereinbart werden.

Im Nash'schen Verhandlungskonzept wird von Absprachen über die zu wählenden Strategien ausgegangen. Aber die Gewinne sind noch individuell und werden nicht umverteilt (jeder erhält und behält seinen im Spiel für ihn vorgesehenen Gewinn).

In den jetzt zu betrachtenden Spielen ist volle Kooperation erlaubt:

- die Spieler können bindende Absprachen treffen, z.B. über gemeinsames Handeln und Umverteilung der (evtl. individuell) erzielten Gewinne,

- insbesondere können Spielergruppen sich zu einer Koalition zusammenschließen.

Es gehört bei den kooperativen Spielen zu den Regeln, dass einmal gebildete Koalitionen für die Dauer des Spiels bestehen bleiben (sind stabil).

In den nichtkooperativen Spielen waren die Entscheidungsmöglischkeiten der Spieler darauf reduziert zu entscheiden, welche Strategie gespielt wird. In den kooperativen Spielen geht es darum zu entscheiden, welche Koalitionen sich bilden sollen (wer mit wem kooperiert).

In der nichtkooperativen Theorie ging es um die Maximierung des individuellen Gewinnes ($\max H_i, \forall i$), in der kooperativen Theorie geht es um die Maximierung des Gesamtgewinns einer Koalition, aber in Verbindung mit der Aufteilung auf die Koalitionsmitglieder.

Bemerkung.

1. 2-Personenspiele, die wir im nichtkooperativen Fall bevorzugt hatten, sind arm an Koalitionsmöglichkeiten. Deshalb betrachten wir gleich n-Personenspiele.
2. Anders als im Abschnitt 1. gehen wir hier deduktiv vor. Wir führen zuerst die Begriffe ein und zeigen anschließend, wie das mit den früher betrachteten nichtkooperativen Spielen in Zusammenhang gebracht werden kann.
3. Koalitionen sind keine Kommunen oder so etwas wie ein Kibuz (die Mitglieder werden hier nach den Bedürfnissen versorgt), sondern erzielen Gewinne entsprechend ihrer Position (Stärke) im Spiel. Damit Gewinnumverteilungen möglich sind, ist es bei kooperativen Spielen erforderlich, dass (eventuell individuell) erzielte Gewinne tranferabel sind, d.h. sie müssen in einer gemeinsamen Maßeinheit meßbar sein (z.B. Geld). Bei nichtkooperativen Spielen war das nicht erforderlich. Hier wird H_i immmer nur mit H_i vergleichen (siehe etwa Definition der Nash-GS). Deshalb ist es dort möglich, dass H_i und H_j bei $i \neq j$ in verschiedenen Dimensionen gemessen werden (z.B. H_i in Anzahl von U-Booten, die zu bauen sind, H_j in Urlaubsreisen, die als Präsent erhalten werden).
4. Die kooperative Theorie geht stark auf die 1944 publizierte Monografie von J. v. Neumann und O. Morgenstern zurück.

2.1.2 Grundbegriffe

Definition. Sei $P = \{1, 2, ..., n\}$ eine Menge von Spielern. Jede Teilmenge $K \subset P$ heißt Koalition.

Bemerkung.

1. $K = \emptyset, K = P$ sind erlaubte Koalitionen, $K = \{i\}$ ist eine einelementige Koalition aus dem $i-$ten Spieler. $K = \{i_1, i_2\}$ ist eine zweielementige Koalition ($i_1 \neq i_2$ vorausgesetzt), usw.
2. 2^P bezeichne die Menge aller Teilmengen von P. Es ist das die Menge aller denkbaren Koalitionen.
3. $card(2^P) = 2^n$

Definition. Sei $P = \{1, 2, ..., n\}$ eine Spielermenge. Die reellwertige Funktion

$$v : 2^P \to \mathbb{R}$$

heißt charakteristische Funktion, wenn

$$\begin{cases} v(\emptyset) = 0 \\ v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \forall S, T \subset P \text{ mit } S \cap T = \emptyset \\ \text{(sogenannte Superadditivität).} \end{cases}$$

Definition. Sei $P = \{1, 2, ..., n\}$ eine Menge von Spielern und $v : 2^P \to \mathbb{R}$ eine charakteristische Funktion. Das Tupel $\Gamma =< P, v >$ heißt kooperatives n-Personenspiel.

Bemerkung.

1. Wir interpretieren $v(S)$ als (kollektiven) garantierten Gewinn der Koalition S, wenn sie im Spiel als Koalition (wirklich) handelt, d.h. unabhängig von den nicht an der Koalition beteiligten Spielern handelt und die Spieler der Koalition sich an die verbindlichen Absprachen halten.

2. Superadditivität bedeutet, dass die Koalition $S \cup T$ nicht schlechtere Handlungsmöglichkeiten hat als die elementefremden, unabhängig handelnden Koalitionen S und T.

3. Wenn $S \subset T$ und $T = P \setminus S$, dann ist $S \cap T = \emptyset$, $S \cup T = P$ und nach der Superadditivität muß gelten: $v(S) + v(P \setminus S) \leq v(P)$.

4. Per Induktion erhält man sofort, dass bei $S_1, S_2, ..., S_k \subset P$ mit $S_i \cap S_j = \emptyset$ bei $i \neq j$ stets gilt
$$\sum_{i=1}^{k} v(S_i) \leq v(\cup_{i=1}^{k} S_i).$$

2.1.3 Beispiele des Entstehens einer charakteristischen Funktion aus nichtkooperativen Spielen heraus

2.1.3.1

Es sei $\Gamma =< P_1, ..., P_n, S_1, ..., S_n, H_1, ..., H_n >$ ein nichtkooperatives Spiel in Normalform. Wir wollen diesem Spiel ein kooperatives Spiel $\hat{\Gamma}$ zuordnen (und damit die Spielregeln verändern). Wie kann man Γ eine charakteristische Funktion zuordnen?

Sei $K \subset P := \{1, 2, ..., n\}$ eine Koalition. v.Neumann und O.Morgenstern schlugen vor, den Wert der charakteristischen Funktion v auf der Koalition K als unteren Spielwert des antagonistischen Spiels $\Gamma_K =< \Pi_1, \Pi_2, \Sigma_1, \Sigma_2, H >$ festzulegen, wobei

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &\hat{=} K, \\
\Pi_2 &\hat{=} P \setminus K, \\
\Sigma_1 &= \prod_{i \in K} S_i, \\
\Sigma_2 &= \prod_{i \in P \setminus K} S_i, \\
H(\sigma^1, \sigma^2) &= \sum_{i \in K} H_i(\sigma^1, \sigma^2), \sigma^1 \in \Sigma_1, \sigma^2 \in \Sigma_2.
\end{aligned}$$

Damit ist also

$$v(K) = \max_{\sigma^1\in\Sigma_1} \min_{\sigma^2\in\Sigma_2} \sum_{i\in K} H_i(\sigma^1,\sigma^2). \tag{2.1.1}$$

Diese Vorgehenweise wird nicht von allen Spieltheoretikern anerkannt, z.B. weil der Koalition $P \setminus K$ die Absicht zugeschrieben wird, den Gewinn der Koalition K zu minimieren (was immer das die Koalition $P \setminus K$ kostet). Die Kritik setzt auch daran an, dass in die Festlegung von $v(K)$ nur die Gewinne H_i für die Spieler der Koalition eingehen (vgl. Beispiel 2 aus Abschnitt 2.1.3.3).

2.1.3.2. Beispiel 1

Gegeben sei ein nichtkooperatives 3-Personenspiel Γ, das ein Nichtkonstantsummenspiel ist:

$$\Gamma =< P_1, P_2, P_3, S_1, S_2, S_3, H_1, H_2, H_3 > .$$

Dabei sei $S_1 = S_2 = S_3 = \{A, B\}$ und die H_i seien durch folgende Tabelle gegeben:

Spielerentscheidung			Gewinne von		
P_1	P_2	P_3	P_1	P_2	P_3
A	A	A	1	1	0
A	A	B	-3	1	2
A	B	A	4	-2	2
A	B	B	0	1	1
B	A	A	1	2	-1
B	A	B	2	0	-1
B	B	A	3	1	-1
B	B	B	2	1	-1

Betrachten wir die Koalition $K = \{1, 2\}$. Das Spiel Γ_K ist dann das Spiel mit der Matrix

Strategien von K	Strategien von $P \setminus K$: A	B
AA	2=1+1	-2=-3+1
AB	2=4-2	1=0+1
BA	3=2+1	2=2+0
BB	4=3+1	3=2+1

Die Zeilenminima sind $-2, 1, 2$ bzw. 3. Damit ist nach (2.1.1)

$$v(\{1, 2\}) = \max\{-2, 1, 2, 3\} = 3.$$

Betrachten wir noch die Koalition $K = \{3\}$. Das zugehörige Spiel Γ_K ist das Matrixspiel mit der Matrix

Strategien von K	Strategien von $P \setminus K$: AA	AB	BA	BB
A	0	2	-1	-1
B	2	1	-1	-1

Die Zeilenminima sind -1 und -1. Deshalb ist

$$v(\{3\}) = \max\{-1, -1\} = -1.$$

Betrachten wir schließlich noch die Koalition $K = \{1, 2, 3\}$. Hier ist $P \setminus K = \emptyset$, d.h. das Spiel Γ_K wird zu einer Optimierungsaufgabe.

Nach (2.1.1) ist

$$\begin{aligned} v(\{1,2,3\}) &= \max_{\sigma^1 \in S_1 \times S_2 \times S_3} \min_{\sigma^2 \in \emptyset} (H_1(\sigma^1, \sigma^2) + H_2(\sigma^1, \sigma^2) + H_3(\sigma^1, \sigma^2)) \\ &= \max\{1 + 1 + 0, -3 + 1 + 2, 4 - 2 + 2, 2, 2, 3, 2\} = 4 \end{aligned}$$

Analog berechnen sich die restlichen Werte von v.

Wir erhalten

K	$\{\emptyset\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(K)$	0	1	0	-1	3	1	1	4

Man überprüft, dass $v(K)$ wirklich eine charakteristische Funktion ist, d.h. dass $\forall S, T \subset P$ mit $S \cap T = \emptyset$ gilt $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.

z.B. ist

$$v(\{1\}) + v(\{2\}) \leq v(\{1,2\}),$$

$$v(\{3\}) + v(\{1,2\}) \leq v(\{1,2,3\}).$$

Satz 2.1(siehe unten) wird zeigen, dass das nicht nur zufällig so ist, sondern so sein muß.

2.1.3.3. Beispiel 2

Dieses Beispiel soll zeigen, dass die Zuordnung einer charakteristische Funktion zu einem nichtkooperativen Spiel über die Formel (2.1.1) aus Abschnitt 2.1.3.1 problematisch sein kann, da das v evtl. die im Ausgangsspiel enthaltene Information schlecht widerspiegelt.

Gegeben sei das Bimatrixspiel (d.h. 2 Spieler) mit den Gewinnmatrizen

- $H_1 = [0, 10]$ - Gewinne von P_1,
- $H_2 = [-1000, 0]$ - Gewinne von P_2.

Es soll also P_1 nur eine Strategie haben, P_2 soll 2 Strategien haben.

Es ist klar, dass in diesem Spiel P_1 in einer besseren Position als P_2 ist: Was immer P_2 wählt, der Gewinn von P_1 ist stets größer als der von P_2. Wir können erwarten, dass sich diese Asymmetrie in der chrarakteristischen Funktion niederschlägt. Wie wir sehen werden, ist das aber nicht so, wenn v nach (2.1.1) aus Abschnitt 2.1.3.1 berechnet wird.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} v(\emptyset) &= 0, \\ v(\{1\}) &= \min\{0, 10\} = 0, \\ v(\{2\}) &= \max\{-1000, 0\} = 0, \\ v(\{1,2\}) &= \max\{0 + (-1000), 10 + 0\} = 10 \end{aligned}$$

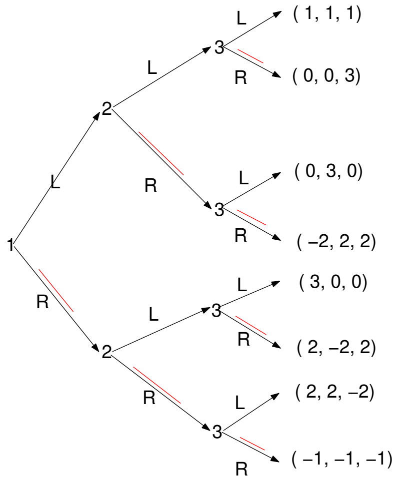
K	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$v(K)$	0	0	0	10

Die charakteristische Funktion hat Symmetrieeigenschaften. Da das kooperative Spiel allein die charakteristische Funktion verwendet (d.h. die Entstehungsgeschichte von v negiert), so wird jedes Lösungskonzept aus einer symmetrischen charakteristischen Funktion auch eine symmetrische Entscheidung als Lösung empfehlen. Warum sollte die Lösung des kooperativen Spiels in unserem Fall asymmetrisch sein?

Hier setzen Kritiker der Formel (2.1.1) an.

2.1.3.4. Beispiel 3

Wir wollen noch folgendes Positionsspiel betrachten, das ein 3-Personen- Nichtkonstantsummenspiel ist. Spieler P_1 ist in Knoten (1) am Zug, Spieler P_2 in den Knoten (2) und Spieler P_3 in den Knoten (3). In jedem Knoten haben die Spieler 2 Wahlmöglichkeiten L bzw. R.



Die Tripel in den Endknoten geben die Gewinne von P_1, P_2, bzw. P_3 an.

Das Spiel sei ein Spiel mit vollständiger Information. Dann existiert in ihm ein Nash-Gleichgewicht, das eine absolute Nash-GS ist. Letzteres bedeutet, dass es auch in jedem Unterspiel eine Nash-GS sein muß. Diese absolute Nash-GS können wir finden, in dem wir, mit den Endknoten beginnend, die Unterspiele analysieren. Das führt zu den mit Doppelstich versehenen Entscheidungen in den Knoten. Damit ist $[R, R, R]$ mit den Gewinnen $[-1, -1, -1]$ eine Nash-GS im nichtkooperativen Spiel.

Wir wollen dem Positionsspiel eine charakteristische Funktion über (2.1.1) aus Abschnitt 2.1.3.1 zuordnen.

Betrachten wir die Koalition $K = \{1, 2\}$. Zu ihr gehört das Matrixspiel mit der Matrix

Strategien von K	Strategien von $P \setminus K$ L	R
LL	2	0
LR	3	0
RL	3	0
RR	4	-2

Formel (2.1.1) ergibt $v(\{1,2\}) = \max\{0,0,0,-2\} = 0$.

Für die Koalition $K = \{1,2,3\}$ ergibt sich $v(\{1,2,3\}) = \max\{3,3,3,2,3,2,2,-3\} = 3$.

Analog berechnen sich die v-Werte auf den anderen Koalitionen. Wir erhalten

K	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(K)$	0	-1	-1	-1	0	0	0	3

2.1.3.5. Superadditivität von v nach (2.1.1)

Satz 2.1. *Gegeben sei ein nichtkooperatives Spiel Γ in Normalform $\Gamma =< P_1, P_2, ..., P_n, S_1, S_2, ..., S_n, H_1, H_2, ..., H_n >$. Es sei $P = \{1,2,...,n\}$. $\forall K \subset P$ sei $v(K)$ nach*

$$v(K) := \sup_{\sigma^1 \in \prod_{k\in K} S_k} \inf_{\sigma^2 \in \prod_{k \in P\setminus K} S_k} \sum_{i\in K} H_i(\sigma^1, \sigma^2) \qquad (2.1.2)$$

bestimmt. Dann ist $v : 2^P \to \mathbb{R}$ eine superadditive Funktion.

Beweis. Seien $S, T \subset P$ mit $S \cap T = \emptyset$. Zu zeigen ist, dass $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.

$$v(S\cup T) = \sup_{\sigma^1 \in \prod_{k\in S\cup T} S_k} \inf_{\sigma^2 \in \prod_{k \in P\setminus (S\cup T)} S_k} \sum_{i\in S\cup T} H_i(\sigma^1, \sigma^2).$$

Da $S \cap T = \emptyset$, so ist $\sigma^1 = [\sigma_S^1, \sigma_T^1]$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} v(S \cup T) = & \sup_{\sigma_S^1 \in \prod_{k \in S} S_k} \sup_{\sigma_T^1 \in \prod_{k \in T} S_k} \inf_{\sigma^2 \in \prod_{k \in P \setminus (S \cup T)} S_k} \sum_{i \in S \cup T} H_i(\sigma_S^1, \sigma_T^1, \sigma^2) \\ \geq & \inf_{\sigma^2 \in \prod_{k \in P \setminus (S \cup T)} S_k} \sum_{i \in S \cup T} H_i(\sigma_S^1, \sigma_T^1, \sigma^2) \\ = & \inf_{\sigma^2 \in \prod_{k \in P \setminus (S \cup T)} S_k} [\sum_{i \in S} H_i(\sigma_S^1, \sigma_T^1, \sigma^2) + \sum_{i \in T} H_i(\sigma_S^1, \sigma_T^1, \sigma^2)] \\ \geq & \inf_{\sigma^2 \in \prod_{k \in P \setminus (S \cup T)} S_k} \sum_{i \in S} H_i(\sigma_S^1, \sigma_T^1, \sigma^2) \\ & + \inf_{\sigma^2 \in \prod_{k \in P \setminus (S \cup T)} S_k} \sum_{i \in T} H_i(\sigma_S^1, \sigma_T^1, \sigma^2) \\ \geq & \inf_{\sigma_T^1 \in \prod_{k \in T} S_k} \inf_{\sigma^2 \in \prod_{k \in P \setminus (S \cup T)} S_k} \sum_{i \in S} H_i(\sigma_S^1, \sigma_T^1, \sigma^2) \\ & + \inf_{\sigma_S^1 \in \prod_{k \in S} S_k} \inf_{\sigma^2 \in \prod_{k \in P \setminus (S \cup T)} S_k} \sum_{i \in T} H_i(\sigma_S^1, \sigma_T^1, \sigma^2) \\ = & \inf_{[\sigma_T^1, \sigma^2] \in \prod_{k \in P \setminus S} S_k} \sum_{i \in S} H_i(\sigma_S^1, \sigma_T^1, \sigma^2) \\ & + \inf_{[\sigma_S^1, \sigma^2] \in \prod_{k \in P \setminus T} S_k} \sum_{i \in T} H_i(\sigma_S^1, \sigma_T^1, \sigma^2). \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt $\forall\ \sigma_S^1$ im ersten Summanden und beliebiges σ_T^1 im zweiten Summanden. Deshalb ist

$$\begin{aligned} v(S \cup T) \geq & \sup_{\sigma_S^1 \in \prod_{k \in S} S_k} \inf_{\sigma \in \prod_{k \in P \setminus S} S_k} \sum_{i \in S} H_i(\sigma_S^1, \sigma) \\ & + \sup_{\sigma_T^1 \in \prod_{k \in T} S_k} \inf_{\sigma \in \prod_{k \in P \setminus T} S_k} \sum_{i \in T} H_i(\sigma_T^1, \sigma) \end{aligned}$$

Nach Formel (2.1.2) ergibt sich $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$. □

Bemerkung. 1. Wir haben oben in (2.1.2) empfohlen, den unteren Spielwert des Spiels Γ_K in reinen Strategien als Wert der Funktion v auf der Koalition K zu wählen. Möglich wäre auch, den unteren Spielwert der gemischten Erweiterung von Γ_K zu wählen:

$$v(K) = \sup_{\mu \in \hat{\Sigma}_1} \inf_{\nu \in \hat{\Sigma}_2} \sum_{i \in K} \hat{H}_i(\mu, \nu), \tag{2.1.3}$$

wobei

(a) $\hat{\Sigma}_1$ = Menge der Verteilungsfunktionen über $\prod_{i \in S \cup T} S_i$,

(b) $\hat{\Sigma}_2$ = Menge der Verteilungsfunktionen über $\prod_{i \in P \setminus (S \cup T)} S_i$,

(c) $\hat{H}_i(\mu, \nu)$ = Erwartungswert des Gewinns von P_i, wenn $\Pi_1 = S \cup T$ nach μ und $\Pi_2 = P \setminus (S \cup T)$ nach ν spielen.

Die Aussage des Satzes gilt dann auch. Im Beweis gehen dann einige Gleichungen in Ungleichungen über (in der erfordlichen Richtung), da die Menge der Verteilungsfunktionen über $\prod_{i \in S \cup T} S_i$ in sich das kartesische Produkt aus den Mengen der Verteilungsfunktionen über $\prod_{i \in S} S_i$ und über $\prod_{i \in T} S_i$ enthält.

2. Auf analoge Weise wie Satz 2.1 bewiesen wurde, kann man zeigen, dass im Fall, dass Γ ein Konstantsummenspiel ist (d.h. $\forall \sigma \in \prod_{i=1}^n S_i$ gilt $\sum_{i=1}^n H_i(\sigma) = const$) und dass in jedem antagonistischen Spiel Γ_K eine Nash-GS existiert, dann gilt

$$v(P) = v(K) + v(P \setminus K), \forall K \subset P.$$

3. Im weiteren betrachten wir in einem kooperativen Spiel die charakteristische Funktion als gegeben, d.h. uns interesiert nicht, ob sie nach Formel (2.1.2) oder (2.1.3) aus einem nichtkooperativen Spiel entstanden ist oder nicht.

   Abschnitt 2.1.3 sollte nur eine Möglichkeit aufzeigen, wie eine charakteristische Funktion entstehen kann.

   Um das Gesagte zu unterstreichen, führen wir abschließend ein erstes Beispiel an, in dem das kooperative Spiel unmittelbar gegeben ist:

Beispiel Jazz-Orchester

Eine Jazz-Gruppe bestehe aus der Sängerin S, dem Pianisten P und dem Schlagzeuger D (=drums).

Sie verhandelt mit dem Direktor eines Klubs über die Gage für einen Auftritt im Klub.

Allen 3 Mitgleidern ist er bereit, USD 1000 für einen Abend zu zahlen (wenn sie als 3-er-Gruppe auftreten), wenn nur das Duett aus S und P kommt, zahlt er USD 800, dem Duett aus D und P verspricht er USD 650. Er würde auch nur den Pianisten P solo am Abend nehmen und dafür USD 300 zahlen.

Andere Konstellationen würde er nicht haben wollen.

Marktüblich ist für einen Abend zu zahlen bei einen Duett aus S und D USD 500, für einen Soloabend der Sängerin USD 200. Schlagzeuger treten allein kaum auf.

Wir setzen

$$\{1\} \hat{=} S, \{2\} \hat{=} P, \{3\} \hat{=} D,$$

und definieren

K	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(K)$	0	200	300	0	800	500	650	1000

Dann ist $\Gamma =< \{1,2,3\}, v >$ ein kooperatives Spiel, da die so eingeführte Funktion v superadditiv ist (selbst überprüfen!).

2.2 Zuteilungen (Imputationen)

Das Hauptanliegen der Theorie der kooperativen Spiele besteht in dem Problem, wie die garantierten Gewinne der Koalitionen auf die Spieler verteilt werden sollen.

Definition. Sei $\Gamma =< P, v >$ mit $P = \{1, 2, ..., n\}$ ein kooperatives Spiel. Der Vektor $x = [x_1, x_2, ..., x_n] \in \mathbb{R}^n$ heißt Zuteilung in Γ, wenn gilt

$$\begin{cases} x_i \geq v(\{i\}), \forall i = 1, 2, ..., n \\ \sum_{i=1}^n x_i = v(P) \end{cases}$$

Bemerkung. 1. Wir interpretieren x_i als den Teil von $v(P)$, den Spieler $\{i\}$ schließlich erhält.

In einem nichtkooperativen Spiel erhält P_i einen Gewinn im Ergebnis der strategischen Entscheidungen aller Spieler. Im kooperativen Spiel geht es um eine Verteilung der verfügbaren Summe. Die verfügbare Summe kann durch die strategischen Entscheidungen der Spieler bestimmt sein, nicht aber ihre Aufteilung.

2. Die Forderung $x_i \geq v(\{i\})$ wird individuelle Rationalität genannt.

   Sie ist allgemein akzeptiert, da Spieler $\{i\}$ eine Zuteilung x ablehnen wird, wenn er in ihr weniger erhält als er bei individueller Handlung (d.h. wenn er mit niemandem koaliert, d.h. Koalition $\{i\}$ bildet) erzielen kann.

3. Die Forderung $\sum_{i=1}^n x_i = v(P)$ wird Gruppen-Rationalität genannt.

   Die Forderung wird nicht von allen Theoretikern akzeptiert. Manche lassen $\sum_{i=1}^n x_i \leq v(P)$ als Ersatzforderung zu.

   Klar ist, dass $\sum_{i=1}^n x_i > v(P)$ nicht sinnvoll ist, da dann mehr verteilt werden müßte als verfügbar ist.

   Als Argument für die Gleichheit wird meist folgende Überlegung angeführt: Wäre $\sum_{i=1}^n x_i < v(P)$, so gilt für $x'_i = x_i + \gamma, i = 1, 2, ..., n$, wobei

   $$\gamma = \frac{v(P) - \sum_{j=1}^n x_j}{n} > 0,$$

   dass $x'_i > x_i, \forall i$,

   $$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x'_i = v(P) \\ x'_i > v(\{i\}), \forall i \end{cases}$$

   d.h. $x' = [x'_1, ..., x'_n]$ ist auch eine Zuteilung und sie ist für jeden Spieler besser als $x = [x_1, ..., x_n]$ (und sie ist erreichbar, da $v(P)$ erzielt werden kann).

4. Wir vermerken, dass für eine Zuteilung keine Forderung der Art, dass $\forall S \subset P \quad \sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$ oder $\sum_{i \in S} x_i = v(S)$ gelten muß.

Das zweite kann leicht zur Nichtexistenz von Zuteilungen führen. Das erste verlangt von einer Zuteilung etwas in Abhängigkeit von einer Koalition, die sich im Spiel eventuell garnicht einstellt.

5. Offensichtlich ist:

   Ein Vektor $y = [y_1, y_2, ..., y_n] \in \mathbb{R}^n$ ist eine Zuteilung in Γ genau dann, wenn existieren $\gamma_i, i = 1, ..., n$, für die gilt

$$\begin{cases} y_i = v(\{i\}) + \gamma_i, \forall i = 1, 2, ..., n \\ \gamma_i \geq 0, \forall i = 1, 2, ..., n \\ \sum_{i=1}^n \gamma_i = v(P) - \sum_{i=1}^n v(\{i\}) \end{cases}$$

6. Es bezeichne X die Menge aller Zuteilungen im kooperativen Spiel Γ. Nach der 5.Bemerkung ist

$$X = \{[v(\{1\}) + \gamma_1, v(\{2\}) + \gamma_2, ..., v(\{n\}) + \gamma_n] : \gamma_i \geq 0, \forall i;$$
$$\sum_{i=1}^n \gamma_i = v(P) - \sum_{i=1}^n v(\{i\})\}.$$

Definition. Das kooperative Spiel $\Gamma =< P, v >$ heißt wesentlich, wenn $v(P) - \sum_{i=1}^n v(\{i\}) > 0$. Sonst heißt es unwesentliches Spiel.

Bemerkung. 1. In einem unwesentlichen Spiel ist die Menge der Zuteilungen X einelementig, denn nach Bemerkung 6 von oben erhält man sofort $\sum_{i=1}^n \gamma_i = 0$, wobei $\gamma_i \geq 0, \forall i \Rightarrow \gamma_i = 0, \forall i \Rightarrow$

$$X = \{[v(\{1\}), v(\{2\}), ..., v(\{n\})].$$

2. In einem wesentlichen Spiel enthält die Menge X aller Zuteilungen unendlich viele Elemente, denn bei $\sum_{i=1}^n \gamma_i > 0, \gamma_i \geq 0, \forall i$, gibt es unendlich viele Möglichkeiten der Wahl dieser γ_i (vgl. Bemerkung 6. von oben).

Satz 2.2. *Es sei $\Gamma =< P_1, P_2, S_1, S_2, H >$ ein antagonistisches Spiel, d.h. ein 2-Personen Nullsummenspiel. Wir setzen voraus, dass in Γ eine Nash-GS existiert.*

Es sei $\hat{\Gamma} =< P, v >$ ein kooperatives Spiel mit $P = \{1, 2\}$ und v entsprechend Satz 2.1 Dann ist $\hat{\Gamma}$ ein unwesentliches Spiel.

Beweis. Durch Anwenden der Formel (2.1.2) aus Satz 2.1 erhalten wir ($K = \{1\}, P \setminus K = \{2\}$)

$$v(\{1\}) = \sup_{\sigma^1 \in S_1} \inf_{\sigma^2 \in S_2} H(\sigma^1, \sigma^2).$$

$$\begin{aligned} v(\{2\}) &= \sup_{\sigma^2 \in S_2} \inf_{\sigma^1 \in S_1} (-H(\sigma^1, \sigma^2)) \\ &= - \inf_{\sigma^2 \in S_2} \sup_{\sigma^1 \in S_1} H(\sigma^1, \sigma^2) \\ &= - \sup_{\sigma^1 \in S_1} \inf_{\sigma^2 \in S_2} H(\sigma^1, \sigma^2) \\ &= -v(\{1\}) \end{aligned}$$

($K = \{2\}, P \setminus K = \{1\}$, P_2 erhält in Γ $-H(\sigma^1, \sigma^2)$)
(in Γ soll laut Voraussetzung eine GS existieren, d.h. $\inf_{\sigma^2 \in S_2} \sup_{\sigma^1 \in S_1} H = \sup_{\sigma^1 \in S_1} \inf_{\sigma^2 \in S_2} H$)

$$\begin{aligned} v(\{1,2\}) &= \sup_{[\sigma^1,\sigma^2] \in S_1 \times S_2} \inf_{\emptyset} (H(\sigma^1, \sigma^2) + (-H(\sigma^1, \sigma^2))) \\ &= \sup_{[\sigma^1,\sigma^2] \in S_1 \times S_2} 0 = 0 \end{aligned}$$

(Γ ist Nullsummenspiel) $\Rightarrow v(P) - \sum_{i=1}^{2} v(\{i\}) = 0 - 0 = 0$ $(v(\{1\}) = -v(\{2\}))$
$\Rightarrow$ Spiel ist unwesentlich. □

Bemerkung.

1. Kooperation in solch einem Spiel bringt nichts $\Rightarrow$ Das Axiom der Nichtkooperation in antagonistischen Spielen ist gerechtfertigt $\Rightarrow$ die Nash-GS ist das geeignete Konzept.

2. Warnung: Man sollte nicht denken, dass bei $n > 2$ nichtkooperative n-Personen Nullsummenspiele auch über Satz 2.1 nur auf unwesentliche kooperative Spiele führen (Gegenbeispiel siehe unten für 3-Personenspiele, z.B. Folgerung 2.5.4).

2.3 Strategische Äquivalenz und $(0, 1)$-Normalisierung

Kooperative Spiele mit den gleichen Spielermengen ändern sich nicht wesentlich, wenn die Maßeinheit der charakteristischen Funktion abgeändert wird (z.B. von USD zu CHF übergegangen wird) oder wenn die Spieler vor Spielbeginn einen fixierten Betrag (=Bonus, wenn Betrag positiv, = zu leistende Zahlung, wenn Betrag negativ) erhalten.

Definition. Es seien $\Gamma =< P, v >$ und $\bar{\Gamma} =< P, \bar{v} >$ zwei kooperative n-Personenspiele mit der gleichen Spielermenge P in beiden Spielen. Wir sagen, dass Γ und $\bar{\Gamma}$ strategisch äquivalent sind, wenn n Zahlen $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n$ und ein $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$ existieren, so dass $\forall K \subset P$ gilt

$$\bar{v}(K) = c\, v(K) + \sum_{i \in K} a_i.$$

Bemerkung.

1. Wir schreiben $\Gamma \sim \bar{\Gamma}$ oder auch $v \sim \bar{v}$.

2. Die strategische Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation, denn sie ist reflexiv, da bei $c = 1$ und $a_i = 0, \forall i$ wir erhalten, dass $\Gamma \sim \Gamma$; sie ist symmetrisch, denn wenn $\Gamma \sim \bar{\Gamma}$, dann existieren $c > 0$ und a_i, so dass

$$\bar{v} = c\, v(K) + \sum_{i \in K} a_i.$$

Daraus erhalten wir $v(K) = \frac{1}{c}\bar{v} - \sum_{i\in K} \frac{a_i}{c}$, d.h. $\bar{\Gamma} \sim \Gamma$; sie ist transitiv, denn wenn $\Gamma \sim \bar{\Gamma}$ und $\bar{\Gamma} \sim \bar{\bar{\Gamma}}$, dann existieren $c > 0$ und $a_i, \forall i$ sowie $\gamma > 0$ und $b_i, \forall i$, so dass $\bar{v}(K) = c\,v(K) + \sum_{i\in K} a_i$, sowie $\bar{\bar{v}}(K) = \gamma\bar{v}(K) + \sum_{i\in K} b_i$.

Daraus ergibt sich

$$\bar{\bar{v}}(K) = \gamma(c\,v(K) + \sum_{i\in K} a_i) + \sum_{i\in K} b_i,$$

d.h. $\bar{\bar{v}}(K) = \gamma\,c\,v(K) + \sum_{i\in K}(\gamma a_i + b_i)$, was $\Gamma \sim \bar{\bar{\Gamma}}$ bedeutet.

Damit bewirkt die strategische Äquivalenz eine Zerlegung der Menge aller kooperativen n-Personenspiele (bei fixiertem n) in disjunkte Klassen. Alle Spiele einer Klasse sind untereinander äquivalent und, wenn wir die n-Personenspiele beschreiben wollen, so brauchen wir nur einen Vertreter aus jeder Klasse näher zu studieren. Die Sätze 2.4 und 2.5 werden uns die Auswahl der Vertreter ermöglichen. Vorher wollen wir zeigen, dass mit der strategischen Äquivalenz nicht nur eine Abbildung zwischen den charakteristische Funktionen, sondern auch zwischen den Zuteilungen gegeben ist.

Satz 2.3. *Seien die kooperativen Spiele $\Gamma =< P, v >$ und $\bar{\Gamma} =< P, \bar{v} >$ strategisch äquivalent, wobei $\forall K \subset P$*

$$\bar{v}(K) = c\,v(K) + \sum_{i\in K} a_i. \tag{2.3.1}$$

Seien $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = v(P), x_i \geq v(\{i\}), \forall i\}$, bzw. $Y = \{y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n y_i = \bar{v}(P), y_i \geq \bar{v}(\{i\}), \forall i\}$ die Mengen aller Zuteilungen in Γ bzw. $\bar{\Gamma}$. Dann vermittelt die Abbildung

$$y_i = c\,x_i + a_i, i = 1, 2, ..., n \tag{2.3.2}$$

eine eineindeutige Abbildung von X auf Y.

Beweis. 1. Sei $x \in X$ und y nach (2.3.2) definiert. Dann haben wir

$$\begin{cases} \sum_{i\in P} y_i = c\sum_{i\in P} x_i + \sum_{i\in P} a_i \overset{x\in X}{=} c\,v(P) + \sum_{i\in P} a_i \overset{(2.3.2)}{=} \bar{v}(P) \\ y_i = c\,x_i + a_i \geq c\,v(\{i\}) + a_i \overset{x\in X, c>0}{\geq} c\,v(\{i\}) + \sum_{j\in\{i\}} a_j \overset{(2.3.2)}{=} \bar{v}(\{i\}) \end{cases}$$

Deshalb gilt $y \in Y$, d.h. (2.3.2) ist eine eindeutige Abbildung von X in Y.

2. Nach (2.3.2) ist

$$x_i = \frac{1}{c}y_i - \frac{a_i}{c}, i = 1, 2, ..., n \tag{2.3.3}$$

Wie man leicht nachprüft, ist das eine eindeutige Abbildung von Y in X. Damit ist über (2.3.2) eine eineindeutige Abbildung von X auf Y gegeben. □

Definition. Sei $\Gamma =< P, v >$ ein kooperatives n-Personenspiel. Wir sagen, dass Γ das kooperative n-Personennullspiel ist, wenn

$$v(K) = 0, \ \forall K \subset P.$$

Satz 2.4. *Ein unwesentliches kooperatives n-Personenspiel $\Gamma =< P, v >$ ist dem Nullspiel strategisch äquivalent.*

Beweis. Γ ein unwesentliches Spiel bedeutet

$$v(P) = \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}). \tag{2.3.4}$$

1. Wir zeigen, dass

$$v(K) = \sum_{i \in K} v(\{i\}), \forall K \subset P. \tag{2.3.5}$$

Per Induktion nach $card(K)$ zeigen wir zuerst die abgeschwächte Form (2.3.6) von (2.3.5)

$$v(K) \geq \sum_{i \in K} v(\{i\}), \forall K \subset P. \tag{2.3.6}$$

(2.3.6) gilt für $K = \emptyset$.

Es gelte (2.3.6) für jeden $K \subset P$ mit $card(K) \leq k$.

Sei $card(K) = k + 1$. Sei $i_0 \in K$. Nach der Superadditivität der charakteristischen Funktion v ist

$$\begin{aligned} v(K) &= v((K \setminus \{i_0\}) \cup \{i_0\}) \geq v(K \setminus \{i_0\}) + v(\{i_0\}) \\ &\overset{\text{Ind.-Annahme}}{\geq} \sum_{i \in K \setminus \{i_0\}} v(\{i\}) + v(\{i_0\}) = \sum_{i \in K} v(\{i\}) \end{aligned}$$

d.h. (2.3.6) gilt.

Um (2.3.5) zu beweisen, nehmen wir entgegen dem zu Beweisenden an, es gäbe ein $\bar{K} \subset P$ mit

$$v(\bar{K}) > \sum_{i \in \bar{K}} v(\{i\}). \tag{2.3.7}$$

Wir haben dann

$$\begin{aligned} v(P) &= v(\bar{K} \cup (P \setminus \bar{K})) \overset{v \text{ ist superadditiv}}{\geq} v(\bar{K}) + v(P \setminus \bar{K}) \\ &\overset{\text{(2.3.7) und (2.3.6)}}{>} \sum_{i \in \bar{K}} v(\{i\}) + \sum_{i \in P \setminus \bar{K}} v(\{i\}) = \sum_{i \in P} v(\{i\}) \end{aligned}$$

was im Widerspruch zu (2.3.4) steht.

2. Wir definieren das Spiel $\hat{\Gamma} =< P, \hat{v} >$ wie folgt.

$$\forall K \subset P \text{ sei } \hat{v}(K) = v(K) - \sum_{i \in K} v(\{i\}) \overset{(2.3.5)}{=} 0. \tag{2.3.8}$$

Einerseits ist $\hat{\Gamma}$ das n-Personen-Nullspiel. Andereseits ist Γ strategisch äquivalent zu $\hat{\Gamma}$ $(c = 1, a_i = -v(\{i\}))$.

$\hat{\Gamma}$ ist ein kooperatives Spiel, da wir uns leicht davon überzeugen können, dass v superadditiv ist. Denn, für $S, T \subset P, S \cap T = \emptyset$ gilt

$$\begin{aligned} \hat{v}(S \cup T) &\overset{(2.3.8)}{=} v(S \cup T) - \sum_{i \in S \cup T} v(\{i\}) \\ &\overset{v \text{ ist superadditiv und } S \cap T = \emptyset}{\geq} v(S) + v(T) - \sum_{i \in S} v(\{i\}) - \sum_{i \in T} v(\{i\}) \\ &\overset{(2.3.8)}{=} \hat{v}(S) + \hat{v}(T). \end{aligned}$$

Deshalb ist Γ dem kooperativen n-Personennullspiel strategisch äquivalent.

$\square$

<u>Definition</u>. Sei $\Gamma =< P, v >$ ein kooperatives n-Personenspiel. Wir sagen, dass Γ in 0-1-reduzierter Form vorliegt, wenn

$$\begin{cases} v(\{i\}) = 0, \forall i \in P, \\ v(P) = 1. \end{cases}$$

<u>Bemerkung</u>. 1. Da bei einem Spiel in 0-1-reduzierter Form

$$v(P) = 1 > 0 = \sum_{i \in P} v(\{i\}),$$

so ist solch ein Spiel ein wesentliches Spiel.

2. Bei einem Spiel in 0-1-reduzierter Form gilt

$$v(K) \in [0, 1], \forall K \subset P \tag{2.3.9}$$

Beweis. (a) Wir zeigen zuerst per Induktion nach $card(K)$ die abgeschwächte Form (2.3.10) von (2.3.9)

$$v(K) \geq 0, \forall K \subset P \tag{2.3.10}$$

Bei $K = \emptyset$ gilt (2.3.10).
Sei (2.3.10) wahr für $K \subset P$ mit $card(K) \leq k$.

Sei $K \subset P$ und $card(K) = k+1$. Sei $i_0 \in K$. Dann ist

$$\begin{aligned} v(K) &= v((K \setminus \{i_0\}) \cup \{i_0\}) \\ &\overset{v \text{ ist superadditiv}}{\geq} v(K \setminus \{i_0\}) + v(\{i_0\}) \\ &\overset{v(\{i_0\})=0, \text{ da } \Gamma \text{ 0-1-reduziert ist}}{=} v(K \setminus \{i_0\}) \\ &\overset{k=card(K\setminus\{i_0\}), \text{ Ind.-Annahme}}{\geq} 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 1 &\overset{\Gamma \text{ ist 0-1-reduziert}}{=} v(P) = v(K \cup P \setminus K) \\ &\overset{v \text{ ist superadditiv}}{\geq} v(K) + v(P \setminus K) \\ &\overset{\text{nach (2.3.10) ist } v(P\setminus K)\geq 0}{\geq} v(K). \end{aligned}$$

□

Satz 2.5. *Ein wesentliches kooperatives n-Personenspiel* $\Gamma =< P, v >$ *ist genau einem kooperativen n-Personenspiel* $\bar{\Gamma} =< P, \bar{v} >$ *in 0-1-reduzierter Form strategisch äquivalent.*

Beweis. 1. Γ sei wesentlich, d.h. $v(P) > \sum_{i \in P} v(\{i\})$. Dann ist

$$c := \frac{1}{v(P) - \sum_{i \in P} v(\{i\})} > 0.$$

Außerdem setzen wir $a_i = -c\, v(\{i\}), i = 1, 2, ..., n$, und $\forall K \subset P$

$$\bar{v}(K) = c\, v(K) + \sum_{i \in K} a_i \tag{2.3.11}$$

2. Dann ist $\Gamma =< P, \bar{v} >$ ein kooperatives Spiel, denn

$$\begin{aligned} v(\emptyset) &= c\, v(\emptyset) + \sum_{i \in \emptyset} a_i = 0, \\ \bar{v}(S \cup T) &\overset{(2.3.11)}{=} c\, v(S \cup T) + \sum_{i \in S \cup T} a_i \\ &\overset{c>0,\ v \text{ ist superadditiv}}{\geq} c(v(S) + v(T)) + \sum_{i \in S \cup T} a_i \\ &\overset{S \cap T = \emptyset}{=} (c\, v(S) + \sum_{i \in S} a_i) + (c\, v(T) + \sum_{i \in T} a_i) \\ &\overset{(2.3.11)}{=} \bar{v}(S) + \bar{v}(T) \end{aligned}$$

3. Nach (2.3.11) ist Γ strategisch äquivalent mit $\bar{\Gamma}$. $\bar{\Gamma}$ ist aber ein Spiel in 0-1-reduzierter Form, denn

$$\begin{cases} \bar{v}(\{i\}) \overset{(2.3.11)}{=} c\,v(\{i\}) + a_i \overset{a_i=-cv(\{i\})}{=} 0, \forall i \in P, \\ \bar{v}(P) \overset{(2.3.11)}{=} c\,v(P) + \sum_{i\in P} a_i \\ \qquad \overset{\text{Def. von } a_i}{=} c\,v(P) - c\sum_{i\in P} v(\{i\}) \overset{\text{Def. von } c}{=} 1. \end{cases}$$

4. Es bleibt zu zeigen, dass Γ nur einem kooperativen Spiel in 0-1-reduzierter Form strategisch äquivalent ist.

   Es sei entgegen dem zu Beweisenden Γ, außer mit $\bar{\Gamma}$ von oben, noch mit dem kooperativen Spiel $\bar{\bar{\Gamma}}$ in 0-1-reduzierter Form strategisch äquivalent, d.h. neben (2.3.11) mit c und a_i aus 1. gilt noch $\forall K \subset P$ und ein $\alpha > 0$ sowie gewissen $\alpha_i \in \mathbb{R} \;\; \forall i \in P$

$$\bar{\bar{v}}(K) = \alpha v(K) + \sum_{i\in K} \alpha_i. \tag{2.3.12}$$

   Dann haben wir nach (2.3.12) für $K = \{i\}$

$$0 \overset{\bar{\bar{\Gamma}} \text{ ist 0-1-reduziert}}{=} \bar{\bar{v}}(\{i\}) = \alpha v(\{i\}) + \alpha_i,$$

   d.h.

$$\alpha_i = -\alpha v(\{i\}). \tag{2.3.13}$$

   Analog erhalten wir für $K = P$ aus (2.3.12)

$$1 \overset{\bar{\bar{\Gamma}} \text{ ist 0-1-reduziert}}{=} \bar{\bar{v}}(P) = \alpha v(P) + \sum_{i\in P} \alpha_i,$$

   d.h. nach (2.3.13) ist $1 = \alpha v(P) - \alpha \sum_{i\in P} v(\{i\})$, woraus sich

$$\alpha = \frac{1}{v(P) - \sum_{i\in P} v(\{i\})}$$

   ergibt, d.h. $\alpha = c$ und (2.3.13) ergibt, dass $a_i = \alpha_i, \forall i \Rightarrow \bar{\Gamma} \equiv \bar{\bar{\Gamma}}$.

□

Folgerung (2.5.1). *Wenn wir kooperative n-Personenspiele studieren wollen, können wir uns auf die Spiele in 0-1-reduzierter Form beschränken, denn*

- *nach Satz 2.4 sind die unwesentlichen Spiele dem Nullspiel strategisch äquivalent, Nullspiele sind aber uninteressant,*

- *nach Satz 2.5 sind die wesentlichen Spiele den Spielen in 0-1-reduzierter Form strategisch äquivalent.*

Folgerung (2.5.2). *Es gibt nur 2 kooperative 2-Personenspiele.*

Genauer: *Ein beliebiges kooperatives 2-Personenspiel* $\Gamma =< P, v >$ *ist entweder dem Spiel* $\bar{\Gamma} =< P, \bar{v} >$ *mit*

$$\bar{v}(\{\emptyset\}) = \bar{v}(\{1\}) = \bar{v}(\{2\}) = \bar{v}(\{1,2\}) = 0$$

oder dem Spiel $\bar{\bar{\Gamma}} =< P, \bar{\bar{v}} >$ *mit*

$$\bar{\bar{v}}(\{\emptyset\}) = \bar{\bar{v}}(\{1\}) = \bar{\bar{v}}(\{2\}) = 0, \ \bar{\bar{v}}(\{1,2\}) = 1$$

strategisch äquivalent.

Beweis. Γ ist entweder ein wesentliches Spiel oder ein unwesentliches Spiel.

Im ersten Fall ist es strategisch äquivalent mit $\bar{\Gamma}$ (vgl. Satz 2.4).

Im zweiten Fall ist es strategisch äquivalent mit einem 2-Personenspiel in 0-1-reduzierter Form (vgl. Satz 2.5). Davon gibt es aber nur das Spiel $\bar{\bar{\Gamma}}$ (bei $P = \{1, 2\}$). □

Folgerung (2.5.3). *Es gibt unendlich viele kooperative 3-Personenspiele.*

Genauer: *Ist* $\Gamma =< P, v >$ *ein kooperatives 3-Personenspiel, dann ist* Γ *entweder dem Nullspiel* $\bar{\Gamma} =< P, \bar{v} >$ *mit* $v(K) = 0, \forall K \subset P$ *oder einem Spiel* $\bar{\bar{\Gamma}} =< P, \bar{\bar{v}} >$ *mit*

$$\bar{\bar{v}}(\{\emptyset\}) = \bar{\bar{v}}(\{1\}) = \bar{\bar{v}}(\{2\}) = \bar{\bar{v}}(\{3\}) = 0$$

$$\bar{\bar{v}}(\{1,2\}) = \alpha, \ \bar{\bar{v}}(\{1,3\}) = \beta, \ \bar{\bar{v}}(\{2,3\}) = \gamma, \ 0 \le \alpha, \beta, \gamma \le 1$$
$$\bar{\bar{v}}(\{1,2,3\}) = 1$$

strategisch äquivalent.

Beweis. Satz 2.4 und Satz 2.5. □

Folgerung (2.5.4). *Es gibt nur 2 kooperative 3-Personenspiele, die entsprechend Abschnitt 2.1.3.5 aus nichtkooperativen 3-Personen-Konstantsummenspielen entstehen können.*

Genauer: *Ein auf diese Weise enstandenes kooperatives 3-Personenspiel* Γ *ist entweder dem Nullspiel* $\bar{\Gamma} =< P, \bar{v} >$ *mit* $v(K) = 0, \forall K \subset P$ *oder dem Spiel* $\Gamma' =< P, v' >$ *mit*

$$v'(\{\emptyset\}) = v'(\{1\}) = v'(\{2\}) = v'(\{3\}) = 0$$

$$v'(\{1,2\}) = v'(\{1,3\}) = v'(\{2,3\}) = v'(\{1,2,3\}) = 1$$

strategisch äquivalent.

Beweis. Nach Folgerung (2.5.3) brauchen wir nur $\bar{\bar{\Gamma}} =< P, \bar{\bar{v}} >$ näher zu betrachten.

Nach Bemerkung 2, im Anschluß an den Beweis von Satz 2.1 (vgl. Abschnitt 2.1.3.5) ist (da ein nichtkooperatives Konstantsummenspiel zugrunde liegt)

$$\forall K \subset P \quad v(P) = v(K) + v(P \setminus K). \tag{2.3.14}$$

Sei $\Gamma =< P, v >$ ein wesentliches Spiel und mit $\bar{\bar{\Gamma}}$ strategisch äquivalent, d.h. es existiert $c > 0$ und existieren $a_i \in \mathbb{R}, \forall i$, so dass

$$\bar{\bar{v}}(K) = c\, v(K) + \sum_{i \in K} a_i, \forall K \subset P.$$

Dann haben wir $\forall K \subset P$

$$v(K) = \frac{1}{c}[\bar{\bar{v}}(K) - \sum_{i \in K} a_i].$$

Eingesetzt in (2.3.14) ergibt das

$$\frac{1}{c}[\bar{\bar{v}}(P) - a_1 - a_2 - a_3] = \frac{1}{c}[\bar{\bar{v}}(K) - \sum_{i \in K} a_i] + \frac{1}{c}[\bar{\bar{v}}(P \setminus K) - \sum_{i \in P \setminus K} a_i],$$

d.h. $\bar{\bar{v}}(P) = \bar{\bar{v}}(K) + \bar{\bar{v}}(P \setminus K), \forall K \subset P$.

Für $K = \{1, 2\}$ ergibt das

$$1 \overset{\bar{\bar{\Gamma}} \text{ ist 0-1-reduziert}}{=} \bar{\bar{v}}(\{1, 2, 3\}) = \bar{\bar{v}}(\{1, 2\}) + \bar{\bar{v}}(\{3\}).$$

v ist 0-1-reduziert und nach Folgerung (2.5.3) ist: $v(\{1, 2\}) = \alpha$. Somit gilt

$$1 = \alpha + 0 = \alpha.$$

Analog zeigt man, dass $\beta = \gamma = 1$.

Von den unendlich vielen Spielen $\bar{\bar{\Gamma}}$ aus Folgerung 2.5.3 kommt also in unserem Fall nur das Spiel $\bar{\bar{\Gamma}}$ mit $\alpha = \beta = \gamma = 1$ in Frage.

□

Bemerkung. Abschließend (zu Abschnitt 2.3) wollen wir zu den Beispielen aus Abschnitt 2.1.3.2 das zugehörige Spiel in 0-1-reduzierter Form berechnen.

Beispiel 1: aus nichtkooperativem 3-Personen-Nichtkonstantsummenspiel hervorgegangen.

K	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(K)$	0	1	0	-1	3	1	1	4

Das ist ein wesentliches Spiel, denn

$$4 = v(P) > \sum_{i=1}^{3} v(\{i\}) = 0.$$

Entsprechend dem Beweis von Satz 2.5 ordnen wir ihm das Spiel $\bar{\Gamma} =< P, \bar{v} >$ in 0-1-reduzierter Form zu, wobei $\forall K \subset P$ gilt

$$\bar{v}(K) = c\, v(K) + \sum_{i \in K} a_i$$

mit $c = \frac{1}{v(P)-\sum_{i\in P} v(\{i\})} = \frac{1}{4-0} = \frac{1}{4}$, $a_i = -c\,v(\{i\}), \forall i$, d.h. $a_1 = -\frac{1}{4}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{4}$. Damit ergibt sich $\bar{v}$ zu

K	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\bar{v}(K)$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
					α	β	γ	

Beispiel 3: aus Positionsspiel, das ein Nichtkonstantsummenspiel ist, hervorgegangen.

K	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(K)$	0	-1	-1	-1	0	0	0	3

Das ist ein wesentliches Spiel. Wir erhalten

$$c = \frac{1}{6},\ a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{6}.$$

Damit ergibt sich für das zugehörige kooperative Spiel in der 0-1-reduzierten Form:

K	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\bar{v}(K)$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Beispiel 4: Jazz-Gruppe, war direkt als kooperatives Spiel gegeben.

K	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(K)$	0	200	300	0	800	500	650	1000

Das ist ein wesentliches Spiel. Wir erhalten

$$c = \frac{1}{500},\ a_1 = -\frac{2}{5},\ a_2 = -\frac{3}{5},\ a_3 = 0.$$

Damit ergibt sich für das zugehörige kooperative Spiel in der 0-1-reduzierten Form:

K	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\bar{v}(K)$	0	0	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{10}$	1

2.4 Dominanz von Zuteilungen

Die Lösungsbegriffe für kooperative Spiele benutzen den Dominanzbegriff: Welche Zuteilung ist gegenüber anderen vorzuziehen.

Definition. Es sei $\Gamma =< P, v >$ ein kooperatives n-Personenspiel. Sei $K \subset P$ eine Koalition in Γ. Seien $x = [x_1, x_2, ..., x_n]$ und $y = [y_1, y_2, ..., y_n]$ zwei Zuteilungen in Γ. Wir sagen, dass x bei der Koalition K über der Zuteilung y dominiert, wenn

$$\begin{cases} x_i > y_i, \forall i \in K, \\ \sum_{i\in K} x_i \leq v(K) \end{cases}$$

Bezeichnung: $x \succ_K y$.

Bemerkung. 1. Jeder Spieler aus K bekommt in x mehr als in y, deshalb wird die Koalition K die Zuteilung x im Vergleich mit y bevorzugen.

2. Von einer Zuteilung x ist nur gefordert, dass $x_i \geq v(\{i\}), \forall i \in K$ und dass $\sum_{i \in P} x_i = v(P)$. Deshalb muß $\sum_{i \in K} x_i \leq v(K)$ nicht automatisch erfüllt sein. $v(K)$ ist der Wert, den die Koalition K erwarten kann. Die zweite Forderung beinhaltet deshalb, dass K unter ihren Mitgliedern nicht mehr verteilt als sie erwarten kann.

3. Wenn in einer zur Diskussion stehenden Zuteilung $\sum_{i \in K} x_i > v(K)$, dann sollte K die Zuteilung x als Glücksfall für sich betrachten und sie nicht mit anderen Zuteilungen vergleichen (z.B. über Dominanz), d.h. sollte zugreifen.

4. $x_i > x_i$ ist ein Widerspruch, weshalb $\succ_K$ nicht reflexiv ist.

   $\succ_K$ ist nicht symmetrisch, da $x_i > y_i$ verhindert, dass $y_i > x_i$. Es ist aber bei verschiedenen Koalitionen K_1, K_2 möglich, dass sowohl $x \succ_{K_1} y$ als auch $y \succ_{K_2} x$. Aus $x \succ_K y$, $y \succ_K z$ folgt $x \succ_K z$.

5. Wenn $card(K) = 1$ oder $card(K) = n$, dann ist Dominanz unmöglich. Denn: Sei $K = \{i\}$. Wäre $x \succ_K y$ wahr, so wäre nach Definition der Dominanz

   $$\begin{cases} x_i > y_i, \\ x_i = \sum_{j \in K} x_j \leq v(K) = v(\{i\}) \overset{\text{Def. der Zuteilung}}{\leq} y_i, \end{cases}$$

   d.h. $x_i > y_i \geq x_i \Rightarrow$ Widerspruch.

   Sei $K = P$. Wäre $x \succ_K y$, so wäre

   $$\begin{cases} x_i > y_i, \forall i \in K \\ v(P) \geq \sum_{i \in P} x_i \text{ nach Definition der Dominanz,} \end{cases}$$

   d.h. $v(P) \overset{\text{Def. der Zuteilung}}{=} \sum_{i \in P} x_i > \sum_{i \in P} y_i \overset{\text{Def. der Zuteilung}}{=} v(P)$.

Definition. Es sei $\Gamma =< P, v >$ ein kooperatives n-Personenspiel. Seien x und y beides Zuteilungen in Γ. Wir sagen, dass x über y dominiert, wenn eine Koalition $K \subset P$ existiert, so dass $x \succ_K y$.

Schreibweise: $x \succ y$.

Bemerkung. 1. $x \succ y$ bedeutet: In der Gesellschaft (=Menge der Spieler) finden sich Kräfte (=Koalition), die x gegenüber y verteidigen (=vorziehen) werden.

2. $\succ$ ist nicht reflexiv.

   $\succ$ kann symmetrisch sein ($x \succ y$ nach einer Koalition und $y \succ x$ nach anderer Koalition, wobei diese Koalitionen offensichtlich elementefremd sein müssen).

   $\succ$ muß nicht transitiv sein.

   Beispiel dafür dass aus $x \succ y$ und $y \succ z$ nicht folgen muß, dass $x \succ z$:

$P = \{1, 2, 3\}$,

K	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(K)$	0	0	0	0	10	10	10	10

Sei $x = [4, 0, 6]$, $y = [6, 4, 0]$, $z = [0, 5, 5]$. x, y, z sind Zuteilungen (Überprüfe das!).

Wir haben $z \succ_{K_1} y$ mit $K_1 = \{2, 3\}$, $y \succ_{K_2} x$ mit $K_2 = \{1, 2\}$.

Damit gilt $z \succ y$, $y \succ x$. Aber $z \succ x$ ist falsch, denn $z \succ_K y$ ist bei keinem $K \subset P$ wahr.

Satz 2.6. *Beim Übergang zu einem strategisch äquivalenten Spiel bleiben Dominanzen erhalten.*

Genauer: *Es seien $\Gamma =< P, v >$ und $\Gamma' =< P, v' >$ zwei kooperative n-Personenspiele, die strategisch äquivalent sind. Seien x und y Zuteilungen in Γ und x' bzw. y' ihre Bilder in Γ' (nach Satz 2.3 werden Zuteilungen eineindeutig aufeinander abgebildet). Dann gilt: Wenn $x \succ_K y$, dann ist auch $x' \succ_K y'$.*

Beweis. $x \succ_K y$ bedeutet,

$$\begin{cases} x_i > y_i, \forall i \in K \\ \sum_{i \in K} x_i \leq v(K). \end{cases} \tag{2.4.1}$$

$\Gamma \sim \Gamma'$ bedeutet, es existieren $c > 0, a_i \in \mathbb{R}, \forall i \in P$, so dass

$$\begin{cases} x'_i = c\,x_i + a_i, \forall i \\ y'_i = c\,y_i + a_i, \forall i (\text{vgl. Satz 2.3}), \end{cases} \tag{2.4.2}$$

$$v'(K) = c\,v(K) + \sum_{i \in K} a_i, \ \forall K \subset P. \tag{2.4.3}$$

Um $x' \succ_K y'$ zu beweisen, müssen wir zeigen, dass

$$\begin{cases} x'_i > y'_i, \forall i \in K \\ \sum_{i \in K} x'_i \leq v'(K). \end{cases}$$

Das gilt aber, denn

$$x'_i \overset{(2.4.2)}{=} c\,x_i + a_i \overset{c>0,(2.4.1)}{\geq} c\,y_i + a_i \overset{(2.4.2)}{=} y'_i$$

$$\sum_{i \in K} x'_i \overset{(2.4.2)}{=} c \sum_{i \in K} x_i + \sum_{i \in K} a_i \overset{(2.4.1)}{\leq} c\,v(K) + \sum_{i \in K} a_i \overset{(2.4.3)}{=} v'(K).$$

□

Folgerung (2.6.1). *Wenn wir einen Lösungsbegriff einführen, der auf dem Dominanzbegriff beruht, so können wir uns bei der Suche nach einer Lösung auf Nullspiele und Spiele in 0-1-reduzierter Form beschränken.*

Denn, jedes kooperative n-Personenspiel ist entweder dem Nullspiel oder einem Spiel in 0-1-reduzierter Form strategisch äquivalent.

2.5 Der c-Kern

2.5.1 Charakterisierung des c-Kerns

Wenn $x \succ y$, so wird der Vorschlag, y als zu realisierende Lösung des Spiels zu wählen, auf Widerstand stoßen. Nämlich, wenn $x \succ_K y$, so werden die Mitglieder der Koalition K sich nicht mit y abfinden wollen. Deshalb kann man eine Zuteilung als " stabil" ansehen (d.h bei niemandem Widerstand hervorrufend), wenn sie von keiner anderen Zuteilung dominiert wird.

Definition. Sei $\Gamma =< P, v >$ ein kooperatives n-Personenspiel. Unter dem c-Kern von Γ versteht man die Menge aller der Zuteilungen in Γ, die von keiner anderen Zuteilung dominiert werden.

Bemerkung.

1. Den c-Kern zum Lösungsprinzip eines kooperativen Spiels zu wählen bedeutet, jede Zuteilung des c-Kerns als Lösung des Spiels anzusehen.
2. Wie wir sehen werden, ist es möglich, dass der c-Kern leer ist. Möglich ist auch, dass er nicht einelementig ist.
3. c in c-Kern kommt von core.

Satz 2.7. *Sei $\Gamma =< P, v >$ ein kooperatives n-Personenspiel. Die Zuteilung x in Γ gehört zum c-Kern von Γ genau dann, wenn*

$$v(K) \leq \sum_{i \in K} x_i, \forall K \subset P \tag{2.5.1}$$

gilt.

Beweis.

1. **Fall**: Γ ist ein unwesentliches Spiel, d.h. $\sum_{i \in P} v(\{i\}) = v(P)$.

   Nach der Bemerkung im Anschluß an die Definition des Begriffes "wesentliches /unwesentliches Spiel" ist $x = [x_1, ..., x_n]$ mit $x_i = v(\{i\}), \forall i$ die einzige Zuteilung in Γ.

   Da es somit keine andere Zuteilung y geben kann, die über x dominiert, so gehört x zum c-Kern und bildet den c-Kern.

   Nach dem Beweis von Satz 2.4 gilt $\forall K \subset P$ $\sum_{i \in K} x_i = \sum_{i \in K} v(\{i\}) = v(K)$.

   Damit wird (2.5.1) von den Elementen des c-Kerns erfüllt und umgekehrt, wenn eine Zuteilung in Γ die Beziehung (2.5.1) erfüllt, dann gehört sie zum c-Kern, d.h. für unwesentliche Spiele gilt der Satz.

2. **Fall**: Sei Γ ein wesentliches Spiel. Solch ein Spiel ist nach Satz 2.5 einem Spiel in 0-1-reduzierter Form strategisch äquivalent. Aus Folgerung 2.6.1 folgt schließlich (da c-Kern-Definition auf Dominanzbegriff beruht), wenn wir den Satz für Spiele in 0-1-reduzierter Form beweisen, dann haben wir ihn auch für alle wesentlichen Spiele bewiesen.

$\underline{\Leftarrow}$ Sei Γ ein Spiel in 0-1-reduzierter Form und sei (2.5.1) für die Zuteilung x in Γ erfüllt.

Entgegen dem zu Beweisenden gehöre x nicht zum c-Kern von Γ. Dann existiert eine Zuteilung y in Γ und eine Koalition K, so dass $y \succ_K x$, d.h.

$$\begin{cases} y_i > x_i, \forall i \in K \\ \sum_{i \in K} y_i \leq v(K). \end{cases}$$

Damit wäre $v(K) \geq \sum_{i \in K} y_i > \sum_{i \in K} x_i \overset{\text{(2.5.1) gilt für } x}{\geq} v(K)$, was nicht sein kann.

$\underline{\Rightarrow}$ Sei Γ ein Spiel in 0-1-reduzierter Form und x sei ein Element des c-Kerns von Γ. Entgegen dem zu Beweisenden sei (2.5.1) für ein $K_0 \subset P$ nicht erfüllt, d.h. es sei

$$v(K_0) > \sum_{i \in K_0} x_i. \tag{2.5.2}$$

Dann ist $K_0 \neq P$ (da x Zuteilung in Γ, d.h. u.a. $\sum_{i \in P} x_i = v(P)$).

Wir definieren

$$\begin{cases} \text{bei } i \in K_0 \text{ sei } y_i = x_i + \frac{v(K_0) - \sum_{i \in K_0} x_i}{card(K_0)} \\ \text{bei } i \notin K_0 \text{ sei } y_i = \frac{1 - v(K_0)}{n - card(K_0)}. \end{cases} \tag{2.5.3}$$

Wir zeigen zuerst, dass $y = [y_1, y_2, ..., y_n]$ eine Zuteilung in Γ ist, d.h. dass

$$\begin{cases} y_i \geq v(\{i\}), \forall i \\ \sum_{i \in P} y_i = v(P). \end{cases}$$

Bei $i \in K_0$ ist

$$y_i \overset{(2.5.3),(2.5.2)}{>} x_i \overset{x \text{ ist Zuteilung in } \Gamma}{\geq} v(\{i\}) \tag{2.5.4}$$

Bei $i \notin K_0$ ist

$$y_i \overset{(*)}{\geq} 0 \overset{\Gamma \text{ ist Spiel in 0-1-reduzierter Form}}{=} v(\{i\})$$

($(*)$:y_i ist nichtnegativ nach (2.5.3), weil Γ in 0-1-reduzierter Form vorliegt, d.h. $v(K_0) \leq 1$ (vgl. Bemerkung zur Definition 0-1-reduzierter Form), und weil $K_0 \neq P$, d.h. $card(K_0) < n$.)

Schließlich haben wir

$$\sum_{i \in P} y_i \overset{(2.5.3)}{=} (\sum_{i \in K_0} x_i + v(K_0) - \sum_{i \in K_0} x_i) + (1 - v(K_0))$$
$$= 1 \overset{\Gamma \text{ ist Spiel in 0-1-reduzierter Form}}{=} v(P)$$

(2.5.4) und (2.5.2) bedeuten aber, dass $y \succ_{K_0} x$, d.h. x kann nicht zum c-Kern gehören $\Rightarrow$ Widerspruch zur Voraussetzung, dass x Element des c-Kerns.

□

Folgerung 2.8. *Der c-Kern eines kooperativen n-Personenspiels ist eine abgeschlossene, konvexe polyedrale Menge.*

Beweis. Es seien $K_0, K_1, ..., K_s$ alle Teilmengen von P, wobei o.E.d.A. gelte $K_0 = \emptyset$, $K_s = P$. Nach Satz 2.7 ist der c-Kern genau die Lösungsmenge des Systems

$$\begin{cases} v(K_0) \le \sum_{i \in K_0} x_i \\ v(K_1) \le \sum_{i \in K_1} x_i \\ ... \\ ... \\ v(K_s) \le \sum_{i \in K_s} x_i \\ x = [x_1, ..., x_n] \text{ ist Zuteilung} \end{cases}$$

Die erste Ungleichung des Systems bedeutet $0 \le 0$, die letzte Zeile des Systems bedeutet $x_i \ge v(\{i\}), \forall i, \sum_{i \in P} x_i = v(P)$. Wir können deshalb die erste weglassen. Die Ungleichungen $x_i \ge v(\{i\})$ kommen unter den s Ungleichungen $v(K_i) \le \sum_{j \in K_i} x_j, i = 1, 2, ..., s$, vor (z.B. mit $K_i = \{i\}$). Weil wir $K_s = P$ vereinbart hatten, bedeutet $\sum_{i \in P} x_i = v(P)$, dass wir die Ungleichung $v(K_s) \le \sum_{i \in K_s} x_i$ mit Gleichheit ansetzen müssen. Damit ist der c-Kern die Lösungsmenge

$$\{[x_1, x_2, ..., x_n] \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = v(P),\ v(K_i) \le \sum_{i \in K_i} x_i,\ i = 1, 2, ..., s-1\}.$$

Damit ist der c-Kern die Lösungsmenge eines Systems von $(s-1)$ linearen Ungleichungen und einer linearen Gleichung, d.h. ist konvex, polyedral, abgeschlossen. □

2.5.2 Einige Rechenbeispiele

Beispiel 4: Jazz-Orchester

(vgl. Abschnitt 2.1.3.5)

Wir hatten vereinbart $\{1\}$ =Sänger, $\{2\}$ =Pianist, $\{3\}$ =Schlagzeuger,

K	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(K)$	0	200	300	0	800	500	650	1000

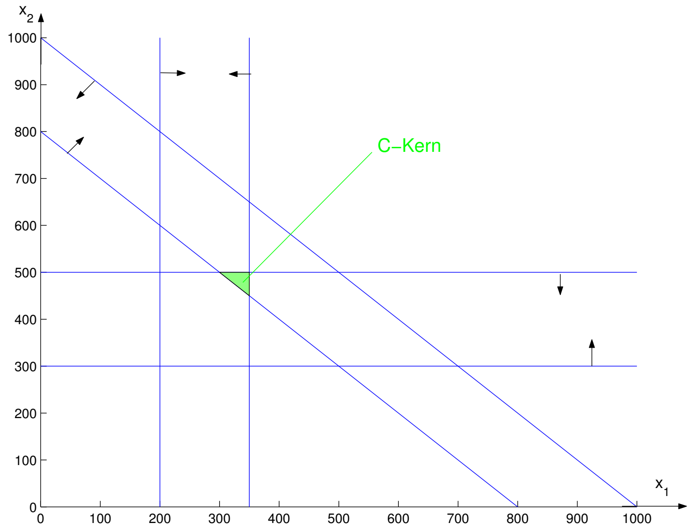
Nach Folgerung 2.8 (bzw. Satz 2.7) ist der c-Kern die Lösung des Systems

$$\begin{cases} x_1 \ge 200 \\ x_2 \ge 300 \\ x_3 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \ge 800 \\ x_1 + x_3 \ge 500 \\ x_2 + x_3 \ge 650 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1000 \end{cases}$$

Wir eliminieren x_3 durch $x_3 = 1000 - x_1 - x_2$. Das ergibt

$$\begin{cases} x_1 \geq 200 \\ x_2 \geq 300 \\ x_1 + x_2 \geq 800 \\ x_1 + x_2 \leq 1000 \\ x_2 \leq 500 \\ x_1 \leq 350 \end{cases}$$

Der c-Kern des Beispiels ist die konvexe Hülle der 3 Punkte mit den Koordinaten $x^{(1)} = [350, 450, 200]$, $x^{(2)} = [350, 500, 150]$, $x^{(3)} = [300, 500, 200]$.



Damit kann jede Zuteilung

$$x = \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \lambda_1 x^{(3)}$$

mit $\lambda_i \geq 0, \forall i, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ als Lösung des Spiels angesehen werden (wenn man den c-Kern als Lösungskonzept akzeptiert).

Kompromißvorschlag

$$x^* = \frac{1}{3}x^{(1)} + \frac{1}{3}x^{(2)} + \frac{1}{3}x^{(3)} = [333, 483, 183]$$

als Lösung des Spiels zu wählen (was soll Sängerin, Pianist bzw. Schlagzeuger erhalten, wenn sie zu dritt auftreten, d.h. wie sollen die DM 1000,- Honorar aufgeteilt werden).

x^* besitzt auch folgende Kompromißeigenschaft

$$x_i^* + x_j^* - v(\{i,j\}) = 16, \forall \{i,j\}.$$

Beispiel 1: (vgl. Abschnitt 2.1.3.2)

K	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(K)$	0	1	0	-1	3	1	1	4

Hier ist der c-Kern die konvexe lineare Hülle der 4 Punkte

$$x^{(1)} = [1,2,1], \qquad x^{(2)} = [1,3,0],$$

$$x^{(3)} = [3,0,1], \qquad x^{(4)} = [3,1,0].$$

$$x^* = \frac{1}{4}x^{(1)} + \frac{1}{4}x^{(2)} + \frac{1}{4}x^{(3)} + \frac{1}{4}x^{(4)} = [2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$$

Beispiel 3: (vgl. Abschnitt 2.1.3.4)

K	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(K)$	0	-1	-1	-1	0	0	0	3

Hier ist der c-Kern die konvexe lineare Hülle der 6 Punkte

$$x^{(1)} = [-1,1,3], \qquad x^{(2)} = [1,-1,3], \qquad x^{(3)} = [3,-1,1],$$

$$x^{(4)} = [1,3,-1], \qquad x^{(5)} = [-1,3,1], \qquad x^{(6)} = [3,1,-1],$$

$$x^* = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x^{(i)} = [1,1,1]$$

Beispiel 5: Autoverkauf

Während die bisherigen Beispiele zeigen, dass man dem c-Kern als Lösungskonzept zustimmen kann, soll dieses Beispiel zeigen, dass man auch Einwände gegen dieses Lösungskonzept vorbringen kann.

Spieler $\{1\}$ =Verkäufer V besitzt ein Auto, das er verkaufen möchte. Er benutzt es nicht mehr und es ist folglich für ihn wertlos, wenn er es nicht verkauft. Es gibt 2 Interessenten - Spieler $\{2\}$ =1.Interessent und Spieler $\{3\}$ =2.Interessent - für das Auto.

$\{2\}$ schätzt das Auto mit DM 500,- ein, $\{3\}$ mit DM 700,-. Das Spiel läuft wie folgt ab: Jeder der Interessenten unterbreitet an den Verkäufer ein Angebot. Letzterer akzeptiert entweder eines der Angebote (vermutlich das höhere) oder schlägt beide aus.

Wir legen die charakteristische Funktion wie folgt fest

K	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(K)$	0	0	0	0	500	700	0	700

Damit ist wirklich eine charakteristische Funktion festgelegt (d.h. sie ist superadditiv).

Wir wollen zuerst eine Motivation für die Wahl der Werte von v erarbeiten.

1. $\underline{v(\{1\})}$: Der Verkäufer V bildet eine Koalition. Wenn er die Angebote von $\{2\}$ und $\{3\}$ ablehnt, erhält er Null. Seine andere Verhaltensvariante (das höhere der beiden Angebote zu akzeptieren) läßt zu, dass sich $\{2\}$ und $\{3\}$ verabreden und beide Null bieten (sie gehören ja zur Gegenkoalition $\{2,3\}$). Auch in diesem Fall ist der sichere Gewinn von $\{1\}$ gleich Null.

2. $\underline{v(\{2\})}$: Da der Verkäufer zur Gegenkoalition von $K = \{2\}$ gehört, besteht immer die Möglichkeit, dass die Gegenkoalition das Angebot von $\{2\}$ ablehnt, d.h. sicher ist für $\{2\}$ nur Null.

3. $\underline{v(\{3\})}$: analoge Begründung wie vorher.

4. $\underline{v(\{1,2\})}$: Die Koalition $\{1,2\}$ hat viele Strategien, nach denen sie sich einigen kann, z.B.

   - $\{2\}$ kauft das Auto für DM 500,- bei $\{1\} \Rightarrow$

   $$\begin{cases} \{1\} \text{ erhält } 500 \\ \{2\} \text{ erhält 500-500=Wert des Autos - Zahlbetrag=0} \\ \{3\} \text{ erhält } 0 \end{cases}$$

   - oder z.B. $\{2\}$ zahlt DM 300,- für das Auto an $\{1\}, \Rightarrow$

   $$\begin{cases} \{1\} \text{ erhält } 300 \\ \{2\} \text{ erhält 200=Wert des Autos(500) - 300} \\ \{3\} \text{ erhält } 0 \end{cases}$$

   in allen Fällen verteilt die Koalition den Wert $v(\{1,2\})$=500,-.

   Mehr als 500,- ist nicht drin, da $\{2\}$ den Wert des Autos mit 500,- bemißt und $\{3\}$ nicht zur Koalition gehört (seine Kooperation wäre erforderlich, wenn mehr als 500 für das Auto bezahlt werden soll.

5. $\underline{v(\{1,3\})}$: analog

6. $\underline{v(\{2,3\})}$: $\{1\}$ kann jedes Angebot von $\{2\}$ und $\{3\}$ ablehnen, d.h. es besteht immer die Möglichkeit, dass $\{2\}$ und $\{3\}$ leer ausgehen $\Rightarrow v(\{2,3\}) = 0$.

7. $\underline{v(\{1,2,3\})}$: Da $\{1\}$ bereit ist, DM 700,- für das Auto zu bezahlen, wird er vermutlich das Auto erhalten $\Rightarrow v(\{1,2,3\})$ =700,-.

Nach dem Beweis von Folgerung 2.8 ist der c-Kern unseres Spiels die Lösungsmenge des Systems

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 500 \\ x_1 + x_3 \geq 700 \\ x_2 + x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 700 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 700 - x_2 - x_3 \\ 500 \leq x_2 + x_3 \leq 700 \\ 0 \leq x_2 \leq 0 = 700 - 700 \\ 0 \leq x_3 \leq 200 \end{cases}.$$

Damit besteht der c-Kern aus den Elementen $[700 - \alpha, 0, \alpha]$, wobei $\alpha \in [0, 200]$. Lösung des Spiels:

$$\begin{cases} \{2\} \text{ erhält } 0, \\ \{3\} \text{ bietet } (700 - \alpha) \text{ für das Auto und} \\ \qquad \text{erhält } 700 - (700 - \alpha) = \text{Wert des Autos} - \text{Angebot} = \alpha, \\ \{1\} \text{ erhält } 700 - \alpha. \end{cases}$$

Obwohl diese Lösungen als vernünftig erscheinen, ist der c-Kern in diesem Beispiel mit einem Makel behaftet:

Wenn $\{2\}$ und $\{3\}$ konspirieren und verabreden, ein niedriges Angebot zu machen, dann kann sich ein Ergebnis einstellen, das als sinvoll einzuschätzen ist, aber nicht im c-Kern enthalten ist. Z.B. könnte das so ablaufen:

$\{2\}$ bietet Null für das Auto,

$\{3\}$ bietet DM 300,-,

$\{1\}$ gibt das Auto für die 300,- an $\{3\}$,

$\{3\}$ zahlt DM 200,- an $\{2\}$ für die Kooperation.

In diesem Fall ist $x_1 = 300, x_2 = 200, z_3 = 200$ =(Wert des Autos für $\{3\}$(d.h. 700) - Zahlung an $\{1\}$(d.h. 300) - Zahlung an $\{2\}$(d.h. 200),

$x = [300, 200, 200]$ ist eine Zuteilung (d.h. $x_i \geq v(\{i\}), \forall i, \sum x_i = v(P)$), aber nicht im c-Kern enthalten.) (Wenn wir 300 durch $\varepsilon > 0$ ersetzen, d.h. $x = [\varepsilon, 500 - \varepsilon, 700 - \varepsilon - (500 - \varepsilon)]$ sich als Zuteilung ergibt, so wird bei ε klein das Angebot vermutlich von $\{1\}$ ausgeschlagen).

Beispiel 6: Abstimmung im Stadtrat von Lake Wobegon

Dieses Beispiel soll belegen, dass der c-Kern auch leer sein kann.

Die Stadt Lake Wobegon wird vom Stadtrat (City Council) und dem Bürgmeister (Mayor) geleitet. Der Stadtrat besteht aus 6 Mitgliedern und dem Vorsitzenden.

Eine Vorlage im Stadtrat wird zum Beschluß auf zweierlei Weise.

Erster Weg: Die Mehrheit der Stadträte (Vorsitzender stimmt nur ab, wenn unter den Mitgliedern Stimmengleichheit eintritt) nimmt die Vorlage an und der Bürgermeister unterzeichnet sie.

Zweiter Weg: Die Mehrheit der Stadträte ist dafür, der Bürgermeister legt aber sein Veto ein und bei einer erneuten Abstimmung stimmen wenigstens 6 der sieben (da Vorsitzender in diesem Fall stets mit abstimmt) Stadträte dafür.

Wir haben es mit einem 8-Personenspiel zu tun.

Wir wollen eine Koalition eine Gewinnerkoalition nennen, wenn sie durchsetzen kann, dass eine Vorlage zum Beschluß wird (wir gehen dabei davon aus, dass alle Koalitionsmitglieder für die Vorlage sind). Andernfalls heißt sie Verliererkoalition.

So ist, z.B., eine Koalition aus 3 Stadträten, dem Vorsitzenden und dem Bürgermeister eine Gewinnerkoalition. Eine Koalition aus vier Stadträten (ob mit oder ohne Bürgermeister bzw. Vorsitzendem) eine Verlierkoalition.

Wir definieren die charakteristische Funktion wie folgt

$$v(K) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } K \text{ eine Gewinnerkoalition,} \\ 0, & \text{wenn } K \text{ eine Verliererkoalition.} \end{cases}$$

Dadurch ist wirklich eine charakteristische Funktion definiert.

Sei $x = [x_M, x_C, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$ eine Zuteilung. (M - Bürgermeister, C - Vorsitzender, $\{i\}$ - Mitglieder.)

Dann ist (weil bei $card(K) = 1$ stets $v(K) = 0$ und $v(P) = 1$)

$$\begin{cases} x_M, x_C, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \\ x_M + x_C + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1 \end{cases} \tag{2.5.5}$$

Wir wollen zeigen, dass der c-Kern des Spiels leer ist.

Entgegen dem zu Beweisenden sei die Zuteilung $\bar{x} = [\bar{x}_M, \bar{x}_C, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6]$ im c-Kern enthalten. Nach Satz 2.7 haben wir

$$\begin{array}{l}
\bar{x}_C + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4 + \bar{x}_5 + \bar{x}_6 \geq 1 \\
\qquad\;\; \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4 + \bar{x}_5 + \bar{x}_6 \geq 1 \\
\bar{x_C} \qquad\quad + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4 + \bar{x}_5 + \bar{x}_6 \geq 1 \\
\bar{x_C} + \bar{x}_1 \qquad\quad + \bar{x}_3 + \bar{x}_4 + \bar{x}_5 + \bar{x}_6 \geq 1 \\
\bar{x_C} + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \qquad\quad + \bar{x}_4 + \bar{x}_5 + \bar{x}_6 \geq 1 \\
\bar{x_C} + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 \qquad\quad + \bar{x}_5 + \bar{x}_6 \geq 1 \\
\bar{x_C} + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4 \qquad\quad + \bar{x}_6 \geq 1 \\
\bar{x_C} + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4 + \bar{x}_5 \qquad\quad \geq 1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Wir subtrahieren (2.5.5) von jeder der 8 Ungleichungen. Aus der ersten Ungleichung ergibt sich $-\bar{x}_M \geq 0$, woraus sich nach (2.5.5)(d.h. $\bar{x}_M \geq 0$) ergibt $\bar{x}_M = 0$. Aus der zweiten Ungleichung ergibt sich $-\bar{x}_M - \bar{x}_C \geq 0$, woraus wir (weil $\bar{x}_M = 0$ und $\bar{x}_C \geq 0$ nach (2.5.5) erhalten $\bar{x}_C = 0$.

Usw., wir erhalten $\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, ..., \bar{x}_6 = 0$, d.h. $\bar{x}_M + \bar{x}_C + \sum_{i=1}^{6} \bar{x}_i = 0$, was (2.5.5) widerspricht.

Das Beispiel ist aber ein sinvolles kooperatives 8-Personenspiel. Der Fakt " c-Kern leer" weist auf einen Defekt des c-Kerns als Lösungsprinzip hin.

Beispiel 7

Das Beispiel soll zeigen, dass der c-Kern unter Umständen leer oder auch nichtleer sein kann.

Eine Expedition von n Personen hat im Himalaya einen Schatz entdeckt. Eine Person allein schafft es nicht, einen Teil (=Komponente, Stück) des Schatzes ins Tal zu bringen, aber jedes Paar aus 2 Personen schafft das. Wir modellieren die Situation durch das kooperative Spiel $\Gamma =< P, v >$ mit

$$v(K) = \begin{cases} \frac{card(K)}{2}, & card(K) \text{ ist gerade,} \\ \frac{card(K)-1}{2}, & card(K) \text{ ist ungerade.} \end{cases}$$

Dann gilt:

1. Wenn $n \geq 4$ und gerade ist, dann besteht der c-Kern aus dem einzigen Element $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}]$.

2. Wenn $n \geq 3$ und ungerade ist, dann ist der c-Kern leer.

Beweis. $n = 2$ Einerseits muß bei einer beliebigen Zuteilung gelten:

$$\begin{cases} x_1 \geq v(\{1\}) = 0 \\ x_2 \geq v(\{2\}) = 0 \\ x_1 + x_2 = v(P) = v(\{1,2\}) = 1 \end{cases}$$

Das sind auch die Forderungen, die nach Satz 2.7 für den c-Kern gelten müssen $\Rightarrow x = [\alpha, 1-\alpha]$ beschreibt für $\alpha \in [0,1]$ den c-Kern.

$n \geq 3$, n - ungerade. Sei $x = [x_1, ..., x_n]$ aus dem c-Kern.

Nach Satz 2.7 ist u.a.

$x_i \geq 0 = v(\{i\}), \forall i$
$\sum_{i=1, i\neq j}^{n} x_i \geq \frac{n-1}{2}$
(da Koalition aus $(n-1)$ Mitgliedern eine gerade Mitgliederzahl hat)
$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n-1}{2}$ (da $K = P$ eine ungerade Mitgliederzahl hat)

Durch Subtraktion erhält man $-x_j \geq 0, \forall j$. Also $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, was $\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n-1}{2}$ widerspricht. Als muß der c-Kern leer sein.

$n \geq 4$, n - gerade. Nach Satz 2.7 gehört $x = [x_1, x_2, ..., x_n]$ zum c-Kern genau dann, wenn

$$\begin{cases} x_i \geq 0 = v(\{i\}), \forall i \\ \sum_{i\in K} x_i \geq \frac{card(K)}{2}, \text{ wenn } card(K) \text{ gerade} \\ \sum_{i\in K} x_i \geq \frac{card(K)-1}{2}, \text{ wenn } card(K) \text{ ungerade} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n}{2}. \end{cases} \tag{2.5.6}$$

Bei $card(K) = 2$ ergibt die zweite Zeile von (2.5.6) die Eigenschaft

$$x_i + x_j \geq 1, \forall i, j \text{ mit } i \neq j.$$

Nehmen wir an, es gäbe ein i_0 mit $x_{i_0} < \frac{1}{2}$.

Dann wäre $x_j \geq 1 - x_{i_0}, \quad \forall j \neq i_0$, d.h. wir hätten nach (2.5.6)

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} = \sum_{j=1}^{n} x_j &= x_{i_0} + \sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} x_j \\ &\geq x_{i_0} + (n-1) - (n-1)x_{i_0} = (n-1) - (n-2)x_{i_0} \\ &\overset{-x_{i_0} > -\frac{1}{2}, (n-2)>0, \text{ da } n\geq 4}{>} (n-1) - \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Widerspruch.

Also muß $x_j \geq \frac{1}{2}, \forall j = 1, 2, ..., n$, gelten.

Aus der letzen Zeile von (2.5.6) ergibt sich dann $x_j = \frac{1}{2}, \forall j$.

Also ist $x = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}]$ der c-Kern.

□

2.5.3 Weitere Aussagen zum c-Kern

Definition. Sei $\Gamma =< P, v >$ ein kooperatives n-Personenspiel. Wenn für beliebige Koalition $K \subset P$ gilt $v(K) + v(P \setminus K) = v(P)$, dann sagen wir, dass Γ ein Konstantsummen Spiel ist.

Bemerkung.

1. Aufgrund der Superadditivität von v muß in einem kooperativen Spiel i.a. nur $v(K) + v(P \setminus K) \leq v(P)$ gelten.
2. Wenn das kooperative Spiel $\Gamma =< P, v >$ auf die in Abschnitt 2.1.3 beschriebene Weise aus einem nichtkooperativen n-Personen-Konstantsummenspiel $\hat{\Gamma} =< P_1, P_2, ..., P_n, S_1, S_2, ..., S_n, H_1, H_2, ..., H_n >$ (d.h. $\sum_{i=1}^{n} H_i(\sigma) = const, \forall \sigma \in \prod_{i=1}^{n} S_i$) hervorgegangen ist, dann ist aufgrund einer Bemerkung zu Satz 2.1 das kooperative Spiel $\Gamma =< P, v >$ ein Konstantsummenspiel im oben definierten Sinne.

Satz 2.9. *Sei $\Gamma =< P, v >$ ein wesentliches kooperatives n-Personenspiel. Dann gilt: Wenn Γ ein Konstantsummenspiel ist, dann ist sein c-Kern leer.*

Beweis. Entgegen dem zu Beweisenden sei $x = [x_1, x_2, ..., x_n]$ im c-Kern von Γ enthalten.

Sei $i \in P$ fixiert. Da x eine Zuteilung ist, so gilt

$$x_i \geq v(\{i\}). \tag{2.5.7}$$

Da x im c-Kern ist, so gilt nach Satz 2.7 für $K = P \setminus \{i\}$

$$\sum_{j \in P \setminus \{i\}} x_j \geq v(P \setminus \{i\}). \tag{2.5.8}$$

Durch Addition der beiden Ungleichungen erhalten wir

$$v(P) \overset{x \text{ ist Zuteilung}}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j \geq v(\{i\}) + v(P \setminus \{i\}) \overset{\Gamma \text{ ist Konstantsummenspiel}}{=} v(P).$$

Folglich muß in (2.5.7) und (2.5.8) Gleichheit gelten.

Da $i \in P$ beliebig war, ist

$$x_i = v(\{i\}), \forall i \in P,$$

woraus wir erhalten

$$v(P) \overset{x \text{ ist Zuteilung}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}),$$

d.h. Γ ist ein unwesentliches Spiel. Wir erhalten einen Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

Satz 2.10. *Es sei* $\Gamma =< P, v >$ *ein kooperatives 3-Personenspiel in 0-1-reduzierter Form. Dann gilt: Der c-Kern von* Γ *ist genau dann nicht leer, wenn*

$$v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) + v(\{2,3\}) \leq 2.$$

Beweis. 1. Nach Satz 2.7 besteht der c-Kern aus allen Lösungen $x = [x_1, x_2, x_3]$ des Systems

$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ (\text{da } x_i \overset{\text{nach Satz 2.7 bei } K=\{i\}}{\geq} v(\{i\}) \overset{\Gamma \text{ ist in 0-1-reduzierter Form}}{=} 0) \\ v(\{1,2\}) \leq x_1 + x_2 \\ v(\{1,3\}) \leq x_1 + x_3 \\ v(\{2,3\}) \leq x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ (\text{da } \Gamma \text{ Spiel in 0-1-reduzierter Form, d.h. } v(P) = 1) \end{cases} \tag{2.5.9}$$

Dieses System ist äquivalent mit dem System

$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \leq 1 - v(\{2,3\}) \\ x_2 \leq 1 - v(\{1,3\}) \\ x_3 \leq 1 - v(\{1,2\}) \end{cases} \tag{2.5.10}$$

da (2.5.10) offensichtlich aus (2.5.9) folgt und umgekehrt.

2. Zeigen wir die "$\Rightarrow$-Richtung" des Beweises.

   Es sei also $[x_1, x_2, x_3]$ aus dem c-Kern. Nach (1) gilt dann (2.5.10). Wenn wir hier die letzten 4 Relationen addieren, so ergibt sich die Behauptung.

3. Zeigen wir die "$\Leftarrow$-Richtung" des Beweises.

   Es sei deshalb

$$v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) + v(\{2,3\}) \leq 2. \tag{2.5.11}$$

   Da Γ ein Spiel in 0-1-reduzierter Form ist, so gilt

$$v(\{i,j\}) \in [0,1]. \tag{2.5.12}$$

   Durch einen kleinen Algorithmus berechnen wir 3 Zahlen $\varepsilon_i \geq 0, i = 1,2,3$.

   Algorithmus:

0.Schritt

$$\begin{aligned}
\alpha &:= 2 - v(\{1,2\}) - v(\{1,3\}) - v(\{2,3\}) \\
\beta_1 &:= 1 - v(\{2,3\}) \\
\beta_2 &:= 1 - v(\{1,3\}) \\
\beta_3 &:= 1 - v(\{1,2\}) \\
I &:= \{1,2,3\} \\
\beta &:= \min_{i \in I} \beta_i \\
i_0 \in I &\text{ so, dass } \beta = \beta_{i_0}
\end{aligned}$$

1.Schritt Wenn $\alpha = 0$, dann $\varepsilon_i = 0, \forall i \in I$ und gehe zu Ende.

2.Schritt Wenn $\beta \leq \alpha$, dann

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i_0} &:= \beta, \\
\alpha &:= \alpha - \beta, \\
I &:= I \setminus \{i_0\}, \\
\beta &:= \min_{i \in I} \beta_i \\
i_0 \in I &\text{ so, dass } \beta = \beta_{i_0}
\end{aligned}$$

und nach 1.Schritt

3.Schritt $\varepsilon_{i_0} := \alpha, \varepsilon_i = 0, \forall i \in I \setminus \{i_0\}$ und zu Ende.

Nach (2.5.12) sind $\beta_i \geq 0, \forall i$ und damit auch $\beta \geq 0$, nach (2.5.11) ist $\alpha \geq 0$. Offensichtlich bricht der Algorithmus spätestens in der dritten Iteration ab. In jedem Fall sind damit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ bestimmt.

Offensichtlich erfüllen die 3 Zahlen die Bedingungen

$$\begin{cases}
0 \leq \varepsilon_1 \leq 1 - v(\{2,3\}) \\
0 \leq \varepsilon_2 \leq 1 - v(\{1,3\}) \\
0 \leq \varepsilon_3 \leq 1 - v(\{1,2\}) \\
\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 2 - v(\{1,2\}) - v(\{1,3\}) - v(\{2,3\})
\end{cases} \tag{2.5.13}$$

Die letzte Bedingung muß deshalb gelten, da andernfalls die ersten 3 alle mit Gleichheit und die vierte mit strenger Ungleichheit ($\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 < 2 - v(\{1,2\}) - v(\{1,3\}) - v(\{2,3\})$) erfüllt wären. Das ist in sich aber ein Widerspruch, da die Summe der ersten drei ergibt $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3 - v(\{1,2\}) - v(\{1,3\}) - v(\{2,3\})$.

Wir setzen nun

$$\begin{cases}
x_1 := 1 - v(\{2,3\}) - \varepsilon_1 \\
x_2 := 1 - v(\{1,3\}) - \varepsilon_2 \\
x_3 := 1 - v(\{1,2\}) - \varepsilon_3
\end{cases}$$

Nach (2.5.13) ist $x = [x_1, x_2, x_3]$ eine Lösung von (2.5.10) und damit nach Teil (1) des Beweises ein Element des c-Kerns, d.h. c-Kern ist nicht leer.

$\square$

2.6 Die N-M-Lösung

2.6.1 Begriff der N-M-Lösung

Wie wir gesehen haben, kann der c-Kern eines kooperativen Spiels leer sein. Außerdem überwiegt in ihm das passive Element: Für die Zugehörigkeit zum c-Kern ist allein das Nichtdominiertwerden entscheidend (nicht aber die Dominanz).

Das veranlaßte die Spieltheoretiker nach anderen Lösungskonzepten zu suchen.

John von Neumann und Oskar Morgenstern schlugen 1953 ein Konzept vor, das den c-Kern erweitert (vgl. Satz 2.11 von unten).

Definition. Sei $\Gamma =< P, v >$ ein kooperatives n-Personenspiel. Unter einer Neumann-Morgenstern-Lösung von Γ (kurz N-M-Lösung) versteht man eine Menge R von Zuteilungen in Γ, für die folgendes gilt:

1. Wenn $x \in R$, so $\nexists y \in R$ mit $y \succ x$ (interne Stabilität).
2. Wenn $x \notin R$ eine Zuteilung in Γ ist, dann existiert ein $y \in R$ mit $y \succ x$ (externe Stabilität).

Bemerkung.

1. (1) bedeutet: die Zuteilungen aus R sind untereinander nicht vergleichbar (was besser, was schlechter). Es existieren keine Kräfte (=Koalition) die darum kämpfen würden, ein Element aus R einem anderen aus R vorzuziehen.
2. (2) bedeutet: Die Zuteilungen aus R sind den anderen Zuteilungen vorzuziehen, d.h. wird ein Element $x \notin R$ als Lösung vorgeschlagen, so finden sich Kräfte (=Koaltion) die dafür eintreten, dass x verworfen wird.
3. Sei R eine N-M-Lösung von Γ und $x \succ y$. Dann ist es nicht möglich, dass sowohl x als auch y in R enthalten ist (wegen der internen Stabilität). Folglich ist wenigstens eine der Aussagen
$$x \notin R, \quad y \notin R$$
wahr. Die Kombination $x \notin R,\ y \in R$ (d.h. Dominanz eines Elementes außerhalb von R über ein Element aus R) ist durch die Definition der N-M-Lösung nicht verboten und auch möglich. Natürlich sind auch $x \in R,\ y \notin R$ und $x, y \notin R$ möglich.
4. Betrachten wir nochmals eine der 4 Kombinationsmöglichkeiten aus der 3.Bemerkung: R sei N-M-Lösung, $x \succ y,\ x \notin R,\ y \in R$. Nach der Definition der N-M-Lösung (vgl. externe Stabilität) existiert zu x ein $z \in R$, so dass $z \succ x$. Wir haben also
$$\begin{cases} z \succ x \succ y \\ z \in R, x \notin R, y \in R \end{cases}$$

Daraus können wir nicht schlußfolgern, dass $z \succ y$ (da die Dominanz nicht transitiv sein muß) und wir damit einen Widerspruch zur internen Stabilität (bzw. die Unmöglichkeit von $x \succ y$, $x \notin R$, $y \in R$) folgern könnten. Das einzige was wir aus $z \succ x \succ y$ mit $z \in R, y \in R, x \notin R$ schlußfolgern können ist der Fakt, dass die Dominanz $z \succ x$ nicht bei der gleichen Koalition wie bei $x \succ y$ stattfinden kann.

5. Eine gewisse Zeit lang waren die Spieltheoretiker der Ansicht (ohne einen Beweis zu haben), dass in einem kooperativen Spiel eine N-M-Lösung immer existiert. 1968 gelang es W.F. Lucas, ein 10-Personenspiel zu konstruieren, das keine N-M-Lösung besitzt. In diesem Spiel ist der c-Kern nicht leer (vgl. Aussage von Satz 2.11).

6. Inzwischen ist für einige Klassen von kooperativen Spielen die Existenz einer N-M-Lösung bewiesen (vgl. Satz 2.13, Satz 2.15 und Satz 2.16 von unten)

7. Bis heute gibt es kein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz einer N-M-Lösung (für allgemeine kooperative n-Personenspiele).

8. Unsere Sätze von unten belegen auch folgende Nachteile des N-M-Lösungskonzeptes:

   - i.a. ist eine N-M-Lösung R nicht einelementig
   - es ist möglich, dass ein konkretes Spiel Γ viele N-M-Lösungen besitzt. **Genauer**: Es kann sein, dass es Mengen von Zuteilungen $R^1, R^2, \ldots$ (jede der R^i eine i.a. nicht einelementige Menge), von denen jede eine N-M-Lösung in Spiel Γ ist.

   Ökonomen, Politiker, Soziologen sehen diesen Nachteil als Widerspiegelung der gesellschaftlichen Realität an, die häufig viele Lösungen zuläßt.

2.6.2 Einige allgemeine Aussagen

Satz 2.11. *Sei $\Gamma =< P, v >$ ein kooperatives n-Personenspiel. Dann ist der c-Kern von Γ in jeder N-M-Lösung R von Γ enthalten, wenn eine letztere überhaupt existiert.*

Beweis. 1. Wenn der c-Kern leer ist, ist die Behauptung trivial.

2. Sei der c-Kern von Γ nichtleer und R sei eine N-M-Lösung von Γ.

   Sei x ein Element des c-Kerns. Wäre entgegen der Behauptung des Satzes $x \notin R$, so würde (R ist extern stabil) ein $y \in R$ existieren mit $y \succ x$. Das ist aber ein Widerspruch zur Definition des c-Kerns.

□

Bemerkung. 1. Das Lucas-Beispiel belegt, dass die Kombination c-Kern nichtleer, N-M-Lösung existiert nicht, möglich ist.

2. Das Lake Wobegon-Spiel belegt die Möglichkeit der Kombination: c-Kern leer, N-M-Lösung existiert (vgl. Satz 2.13 von unten).

3. Satz 2.14 bringt ein Beispiel für die Kombination: c-Kern=N-M-Lösung=$\emptyset$.

Satz 2.12. *Sei $\Gamma =< P, v >$ ein kooperatives n-Personenspiel. Die N-M-Lösung R von Γ sei einelementig (d.h. $R \neq \emptyset, card(R) = 1$). Dann ist Γ ein unwesentliches Spiel.*

Beweis. O.E.d.A. können wir annehmen, dass $n = card(P) > 1$.

Entgegen dem zu Beweisenden sei Γ ein wesentliches Spiel. Nach Satz 2.5 können wir dann o.E.d.A. annehmen, dass Γ in 0-1-reduzierter Form vorliegt (d.h. $v(K) = 0$ bei $card(K) = 1$, $v(P) = 1$, $0 \leq v(K) \leq 1, \forall K \subset P$).

Es sei $R = \{x\}$, $x = [x_1, x_2, ..., x_n]$.

Da

$$1 \overset{\Gamma \text{ ist 0-1-reduziert}}{=} v(P) \overset{\text{Eigenschaft einer Zuteilung}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

und

$$0 \overset{\Gamma \text{ ist 0-1-reduziert}}{=} v(\{i\}) \overset{\text{Eigenschaft einer Zuteilung}}{\leq} x_i,$$

so muß ein i mit $x_i > 0$ existieren.

O.E.d.A. sei $x_1 > 0$. Wir setzen $y = [y_1, y_2, ..., y_n]$, wobei

$$y_i = \begin{cases} x_i + \frac{x_1}{n-1}, \ i \neq 1 \\ 0, \ i = 1 \end{cases} \tag{2.6.1}$$

Dann ist y eine Zuteilung, denn $y_i \geq v(\{i\}), \forall i$

(weil $v(\{i\}) = 0, \forall i$ und $y_i > x_i \geq 0$ bei $i > 1$)

und weil $\sum_{i=1}^{n} y_i \overset{(2.6.1)}{=} \sum_{i=2}^{n} x_i + (n-1)\frac{x_1}{n-1} = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 = v(P)$.

Wäre $y \notin R$, so würde aufgrund der externen Stabilität der N-M-Lösung R ein Element aus R existieren, das über y dominiert. Da R nur aus x besteht, würde $x \succ y$ gelten, d.h. es würde eine Koalition $K \subset P$ existieren, so dass $x \succ_K y$.

Nach Abschnitt 2.4 ist Dominanz bei einelementigen Koalitionen nicht möglich, also auch bei $K = \{1\}$ nicht. Deshalb muß $K \neq \{1\}$ sein, d.h. es würde ein $i_0 \in K$ mit $i_0 \neq 1$ existieren. Einerseits bedeutet $x \succ_K y$, dass $x_j > y_j, \forall j \in K$, d.h.

$$x_{i_0} > y_{i_0} \quad (da \ i_0 \in K) \tag{2.6.2}$$

Andererseits ist (2.6.2) ein Widerspruch zu (2.6.1) (da $i_0 \neq 1$ und $x_1 > 0$, d.h. $y_i > x_i$ bei $i \neq 1$).

Also führt die Annahme $y \notin R$ auf einen Widerspruch zu $R = \{x\}$ (da $y \neq x$).

$\Rightarrow$ Annahme, dass Γ wesentlich ist, kann nicht mehr aufrecht gehalten werden.

$\square$

Folgerung (2.12'). *Im wesentlichen kooperativen Spiel ist eine N-M-Lösung R mehrelementig, wenn R existiert.*

Definition. Sei $\Gamma = < P, v >$ ein kooperatives n-Personenspiel. Wir sagen, dass Γ ein simples Spiel ist, wenn gilt

$$\begin{cases} \forall K \subset P \text{ ist } v(K) \in \{0,1\}, \\ v(P) = 1, \\ v(\{i\}) = 0, \forall i \in P. \end{cases}$$

Bemerkung.

1. Im simplen Spiel heißt $K \subset P$ eine Gewinnerkoalition, wenn $v(K) = 1$. Bei $v(K) = 0$ wird K als Verliererkoalition bezeichnet.
2. Das Lake Wobegon-Spiel (Beispiel 6 aus Abschnitt 2.5.2) ist solch ein simples Spiel.
3. Simple Spiele sind Spiele in 0-1-reduzierter Form und damit wesentliche Spiele.

Definition. Sei $\Gamma = < P, v >$ ein simples Spiel. Die Gewinnerkoalition $K_0 \subset P$ heißt minimale Gewinnerkoalition, wenn $v(S) = 0, \forall S \subset K_0$ mit $S \neq K_0$.

Satz 2.13 (Existenz einer N-M-Lösung in einem simplen Spiel). *Sei $\Gamma = < P, v >$ ein simples kooperatives n-Personenspiel und es sei K_0 eine minimale Gewinner-Koalition. Dann ist*

$$R = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist Zuteilung in } \Gamma, \text{ wobei } x_i = 0, \forall i \notin K_0\}$$

eine N-M-Lösung von Γ.

Bemerkung. Wir wollen den Satz auf das Lake Wobegon-Spiel (Beispiel 6 aus Abschnitt 2.5.2) anwenden. In dem Beispiel ist eine Koalition aus 4 Stadträten plus dem Bürgermeister eine minimale Gewinnerkoalition, da die Koalition eine Vorlage auf dem ersten Weg zum Beschluß erheben kann, aber 3 Stadträte von den vier und der Bürgermeister oder die 4 Stadträte ohne den Bürgermeister das nicht mehr können. Sei $x = [x_M, x_C, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$ eine Zuteilung im Spiel. O.E.d.A. seien x_1, x_2, x_3, x_4 die Zuteilungen der 4 an der Minimalkoalition beteiligten Stadträte.

Dann ist nach Satz 2.13

$$R^1 = \{x \in \mathbb{R}^8 : x_C = x_5 = x_6 = 0, \sum_{i=1}^{4} x_i + x_M = 1, x_i \geq 0 \;\; i = 1,2,3,4, x_M \geq 0\}$$

eine N-M-Lösung vom Lake-Wobegon-Spiel.

Weitere N-M-Lösungen ergeben sich z.B., wenn wir die Rolle der x_1, x_2, x_3, x_4, bzw. x_5, x_6 in $\mathbb{R}^1$ entsprechend gegeneinander austauschen. Andere Strukturen einer Minimalkoalition ergeben weitere N-M-Lösungen (K_0 ist nicht die einzige Möglichkeit einer Minimalkoalition).

Beweis von Satz 2.13.

1. Wir zeigen, dass R intern stabil ist. Seien $x, z \in R$. Entgegen dem zu Beweisenden sei $x \succ_K z$ bei einem gewissen $K \subset P$. Dann gilt
$$\begin{cases} x_i > z_i, \ \forall i \in K \\ v(K) \geq \sum_{i \in K} x_i \end{cases} \tag{2.6.3}$$
Also ist $x_i \neq z_i$ bei $i \in K$.

   Da aber $x_i = z_i = 0$ bei $i \notin K_0$ (da $x, z \in R$), so folgt aus $i \notin K_0$, dass auch $i \notin K$, d.h. $(P \setminus K_0) \subset (P \setminus K)$, was bedeutet (da $K, K_0 \subset P$), dass $K \subset K_0$.

   Außerdem ist $K \neq K_0$. Denn, wäre $K = K_0$, so hätten wir
$$v(P) \overset{x \text{ ist Zuteilung}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \overset{z \text{ ist Zuteilung}}{=} \sum_{i=1}^{n} z_i = \\ \overset{x \in R, \text{ d.h. } x_i = 0 \text{ bei } i \in K_0 = K \text{(laut Annahme analog bei } z)}{=} \sum_{i \in K} x_i = \sum_{i \in K} z_i$$
$\Rightarrow$ Widerspruch zu (2.6.3).

   Also haben wir
$$\begin{cases} K \subset K_0 \\ K \neq K_0. \end{cases}$$
Da aber K_0 eine Minimalkoalition ist und Γ ein simples Spiel ist, muß $v(K) = 0$ sein. Nach (2.6.3) ist damit
$$\sum_{i \in K} x_i \leq 0. \tag{2.6.4}$$
Γ ist aber ein Spiel in 0-1-reduzierter Form, d.h. $z_i \geq v(\{i\}) = 0, \forall i \in P$, was nach (2.6.3) bedeutet, dass $x_i > 0$ bei $i \in K$, d.h. $\sum_{i \in K} x_i > 0 \Rightarrow$ Widerspruch zu (2.6.4).

2. Wir zeigen, dass R extern stabil ist. Es sei $y \notin R$, y - Zuteilung in Γ.

   Da das Spiel in 0-1-reduzierter Form vorliegt, ist $y_i \geq v(\{i\}) = 0, \forall i$. $y \notin R$ bedeutet nach der Definition von R, dass ein $i_0 \notin K_0$ existiert mit $y_{i_0} \neq 0$, d.h. $y_{i_0} > 0$.

   Damit ist
$$1 \overset{\Gamma \text{ liegt in 0-1-reduzierter Form vor. } y = \text{Zuteilung}}{=} \sum_{i=1}^{n} y_i \overset{y_i \geq 0, \forall i, y_{i_0} > 0, i_0 \notin K_0}{>} \sum_{i \in K_0} y_i,$$
d.h. $\alpha := 1 - \sum_{i \in K_0} y_i > 0$.

   Wir setzen
$$\begin{cases} x_i = y_i + \frac{\alpha}{k_0}, \forall i \in K_0 \\ x_i = 0 \text{ bei } i \notin K_0 \end{cases} \tag{2.6.5}$$

Hier sei $k_0 = card(K_0)$.

Per Definition der x_i und von R gilt $x = [x_1, x_2, ..., x_n] \in R$, denn x ist auch Zuteilung ($x_i \geq 0, \forall i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i \in K_0} x_i = \sum_{i \in K_0} y_i + k_0 \frac{\alpha}{k_0} = \sum_{i \in K_0} y_i + 1 - \sum_{i \in K_0} y_i = 1$)

Anderseits ist $x \succ_{K_0} y$, da

$$\begin{cases} x_i > y_i \text{ bei } i \in K_0 \text{ nach (2.6.5) (da } \alpha > 0) \\ \sum_{i \in K_0} x_i \overset{(2.6.5)}{=} \sum_{i \in K_0} y_i + \alpha \overset{\text{Def. von } \alpha}{=} 1 \overset{\Gamma \text{ ist simpel und } K_0 \text{ ist Gewinnerkoalition}}{=} v(K_0) \end{cases}$$

Damit ist die externe Stabilität nachgewiesen.

□

Satz 2.14. *Sei $\Gamma =< P, v >$ ein kooperatives n-Personenspiel in 0-1-reduzierter Form. Wenn $\forall K \subset P$ mit $K \neq P$ gilt*

$$v(K) \leq \frac{1}{n - card(K)},$$

dann ist der c-Kern von Γ nicht leer und er ist auch eine N-M-Lösung von Γ.

2.6.3 Lösung einiger kooperativer 3-Personenspiele

2.6.3.1. THREE

Definition. Es sei $\Gamma =< P, v >$ ein kooperatives 3-Personenspiel. Wir sagen, dass Γ das Spiel THREE ist, wenn gilt:

$$\begin{cases} v(P) = 1, v(\emptyset) = 0 \\ v(K) = 1, \text{ wenn } card(K) = 2 \\ v(K) = 0, \text{ wenn } card(K) = 1 \end{cases}$$

Bemerkung. 1. Man überprüft, dass Γ wirklich ein kooperatives Spiel ist (d.h. v ist superadditiv).

2. THREE ist ein Spiel in 0-1-reduzierter Form und damit ein wesentliches Spiel.

3. THREE ist ein simples Spiel.

4. Wir haben $2 < 3 = v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) + v(\{2,3\}) = 1 + 1 + 1$, d.h. nach Satz 2.10 ist der c-Kern von THREE leer.

Satz 2.15. $R = \{[0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0]\}$ *ist eine N-M-Lösung von THREE.*

Beweis. 1. Wir zeigen, dass R intern stabil in THREE ist. Entgegen dem zu Beweisenden nehmen wir an, es existieren $x, y \in R$ mit $x \succ_K y$.

Wir wissen, dass Dominanz bei Einerkoalitionen und der großen Koalition nicht möglich ist. Deshalb kann K nur eine Zweierkoalition sein. Aus Symmetriegründen ist auch klar, dass wir als x und y zwei beliebige Elemente aus R wählen können. Der Bestimmtheit wegen wählen wir $x = [0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $y = [\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}]$.

Sei $K = \{i, j\}$, $i \neq j$.

Aus $x \succ_K y$ folgt $x_t > y_t, \forall t \in \{i, j\} = K$.

Das ist aber bei den Koordinaten von x und y unmöglich.

2. Wir zeigen die externe Stabilität von R in THREE.

   Sei $y \notin R$ eine Zuteilung in THREE. Da

$$\begin{cases} y_i \geq v(\{i\}) = 0, \forall i \\ \sum_{i=1}^{3} y_i = v(P) = 1 \text{ (weil THREE ein Spiel in 0-1-reduzierter Form ist),} \end{cases}$$

   so ist $y_i \geq \frac{1}{2}$ für zwei Indizes nur bei $y_i = \frac{1}{2}$ für diese zwei Indizes möglich und das dritte y_i müßte dann gleich Null sein. Das aber würde bedeuten $y \in R \Rightarrow$ Widerspruch zu $y \notin R$.

   Deshalb ist wenigstens eines der $y_i \leq \frac{1}{2}$.

   O.E.d.A. sei das y_1 (d.h. $y_1 < \frac{1}{2}$). Von den restlichen y_2, y_3 muß wenigstens ein weiteres kleiner $\frac{1}{2}$ sein (wäre $y_2 \geq \frac{1}{2}$, $y_3 \geq \frac{1}{2}$, so wäre entweder $1 = \sum_{i=1}^{3} y_i \overset{y_i \geq 0, \forall i}{>} 1$ oder $y_2 = y_3 = \frac{1}{2}$, d.h. Widerspruch: $1 > 1$ oder Widerspruch zu $y \notin R$.)

   O.E.d.A. sei $y_2 < \frac{1}{2}$.

   Dann haben wir

$$\begin{cases} [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0] \succ_{\{1,2\}} [y_1, y_2, y_3], \text{ weil } \frac{1}{2} > y_1, y_2 \\ \text{und weil } 1 \overset{\text{vgl. Def. von THREE}}{=} v(\{1,2\}) \overset{y_1, y_2 < \frac{1}{2}}{\geq} y_1 + y_2 = \sum_{i \in \{1,2\}} y_i \end{cases}$$

was zu beweisen war. □

Bemerkung. Nach der Definition des Begriffes N-M-Lösung hatten wir die Möglichkeit von $y \succ x$ bei $y \notin R$ und $x \in R$ diskutiert.

Am Beispiel der N-M-Lösung $R = \{[0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0]\}$ von THREE wollen wir zeigen, dass die erwähnte Möglichkeit sich hier realisiert.

Wir wählen $y = [\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0]$, $x = [\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}]$, $K = \{1, 2\}$.

Dann gilt: $x \in R$, $y \notin R$, y ist Zuteilung.

$$\begin{cases} y_1 > x_1 \\ y_2 > x_2 \\ 1 = v(\{1,2\}) \geq y_1 + y_2 = 1, \end{cases}$$

d.h. $y \succ_K x$.

Auch die Möglichkeit von $z \succ_{K_2} y \succ_{K_1} x$ bei $z, x \in R$, $y \notin R$ läßt sich hier realisieren: y, x wie oben, $K_1 = \{1, 2\} = K$, $z = [0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $K_2 = \{2, 3\}$.

Satz 2.16. *Für beliebiges $c \in [0, \frac{1}{2})$ ist $R^1 = \{[c, x_2, x_3] : x_2, x_3 \geq 0, x_2 + x_3 = 1 - c\}$ eine N-M-Lösung von THREE.*

Bemerkung. 1. Die in Satz 2.15 betrachtete N-M-Lösung R ist bei keinem $c \in [0, \frac{1}{2})$ mit R^1 identisch.

2. Aus Symmetriegründen ist klar, dass auch

$$R^2 = \{[x_1, c, x_3] : x_1, x_3 \geq 0, x_1 + x_3 = 1 - c\}$$

und

$$R^3 = \{[x_1, x_2, c] : x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1 - c\}$$

bei beliebigem $c \in [0, \frac{1}{2})$ N-M-Lösungen sind.

3. Versuchen Sie zu beweisen, dass mit R aus Satz 2.15 sowie R^1, R^2, R^3 alle N-M-Lösungen von THREE beschrieben sind.

4. Für das Beispiel THREE gilt also: Es gibt unendlich viele verschiedene N-M-Lösungen, wobei eine unendliche Teilmenge von ihnen die Eigenschaft hat, dass jede konkrete N-M-Lösung unendlich viele Elemente enthält.

5. Man sagt, dass in R^1 der Spieler P_1 diskriminiert wird: P_2 und P_3 verabreden sich quasi, dem P_1 den Betrag $c < \frac{1}{2}$ zuzubilligen und teilen den Betrag $(1 - c)$ unter sich auf.

Beweis von Satz 2.16. 1. R^1 ist intern stabil, d.h. wir zeigen, dass Dominanz in R^1 nicht möglich ist.

Nehmen wir entgegen dem zu Beweisenden an, dass existieren $[c, x_2, x_3]$, $[c, \bar{x}_2, \bar{x}_3] \in R^1$ mit $[c, x_2, x_3] \succ [c, \bar{x}_2, \bar{x}_3]$ bei irgendeiner Koalition K. $1 \in K$ ist nicht möglich, da sonst $c > c$ sein müßte, außerdem scheiden $K = \{2\}$, $K = \{3\}$, $K = \{1, 2, 3\}$ aus, da Dominanz bei Einerkoalition oder großer Koalition nicht möglich ist. Also bleibt $K = \{2, 3\}$ als einzige Möglichkeit für K. Das bedeutet

$$\begin{cases} x_2 > \bar{x}_2 \\ x_3 > \bar{x}_3, \end{cases}$$

was im Widerspruch zu $x_2 + x_3 = \bar{x}_2 + \bar{x}_3 = 1 - c$ (beide Elemente kommen aus R^1) steht.

Also ist Dominanz in R^1 nicht möglich.

2. R^1 ist extern stabil.

Es sei $y = [y_1, y_2, y_3] \notin R^1$, y eine Zuteilung. Wäre $y_1 = c$, so wäre $y \in R$. Also haben wir $y_1 \neq c$.

Fall $y_1 < c$: Da $y_i \geq 0, \forall i$ und $y_1 + y_2 + y_3 = 1$, so ist es nicht möglich, dass sowohl y_2 als auch y_3 größer $\frac{1}{2}$ sind. Folglich ist wenigstens eine der beiden Koordinaten $\leq \frac{1}{2}$. Der Bestimmtheit wegen sei $y_2 \leq \frac{1}{2}$ (keine Einschränkung der Allgemeinheit, da y_2, y_3 in die Definition von $y \notin R$ symmetrisch eingehen).

Weil $0 \leq c < \frac{1}{2}$, so existiert ein $\alpha > 0$, so dass $c + \alpha \leq \frac{1}{2}$ und damit $\frac{1}{2} - c - \alpha \geq 0$.
Wir setzen $x = [c, \frac{1}{2} + \alpha, \frac{1}{2} - c - \alpha]$. Nach der Definition von R^1 ist $x \in R^1$. Außerdem gilt $x \succ_K y$ mit $K = \{1,2\}$, denn

$$\begin{cases} c = x_1 > y_1 \text{ (wir sind im Fall } y_1 < c) \\ \frac{1}{2} + \alpha = x_2 > y_2 \text{ (da } y_2 \leq \frac{1}{2},\ \alpha > 0) \end{cases}$$

und weil

$$\sum_{i \in K} x_i = x_1 + x_2 = c + (\frac{1}{2} + \alpha) \overset{c+\alpha \leq \frac{1}{2}}{\leq} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \overset{\text{Eigenschaft von THREE}}{=} v(K).$$

Fall $y_1 > c$: Weil $y_1 + y_2 + y_3 = 1$, so ist $y_2 + y_3 = 1 - y_1 \overset{y_1 > c \Leftrightarrow -y_1 < -c}{<} 1 - c$.
Deshalb ist $\beta := \frac{1-c-y_2-y_3}{2} > 0$.
Wir setzen $x = [c, y_2 + \beta, y_3 + \beta]$. Nach Definition von R^1 ist $x \in R^1$.
Außerdem gilt $x \succ_K y$ bei $K = \{2,3\}$, denn

$$\begin{cases} x_2 = y_2 + \beta > y_2 \text{ (weil } \beta > 0) \\ x_3 = y_3 + \beta > y_3 \text{ (weil } \beta > 0) \\ \sum_{i \in K} x_i = x_2 + x_3 = y_2 + y_3 + 2\beta = y_2 + y_3 + 1 - c - y_2 - y_3 \\ \qquad = 1 - c \overset{c \geq 0}{\leq} 1 \overset{\text{Eigenschaft von THREE}}{=} v(\{2,3\}) \end{cases}$$

□

2.7 Der Shapley-Vektor

2.7.1 Shapley Axiomatik

Die bisher betrachteten Lösungsbegriffe c-Kern und N-M-Lösung haben beachtliche Nachteile:

- c-Kern ist in vielen Spielen leer, auch N-M-Lösung kann nicht existieren

- die N-M-Lösung kann sehr umfangreich sein, da es einerseits viele N-M-Lösungen geben kann und andererseits jede N-M-Lösung in der Regel mehr als ein Element, ja sogar überabzählbar viele Elemente (=Zuteilungen) enthalten kann.

Also, weder Existenz noch Eindeutigkeit sind gesichert bei c-Kern und N-M-Lösung.

L.S. Shapley schlug 1953 ein Lösungskonzept vor, das diese Makel nicht besitzt. Es stützt sich nicht auf den Dominanzbegriff (wie c-Kern und N-M-Lösung).

Wir betrachten wieder ein kooperatives n-Personenspiel $\Gamma =< P, v >$. Wir suchen eine Vektor-Funktion Φ, die auf der Menge der charakteristischen Funktionen (bei fixierten $n = card(P)$) definiert ist und in die Menge der Zuteilungen abbildet, genauer, es soll $\Phi(v) = [\Phi_1(v), \Phi_2(v), ..., \Phi_n(v)]$ eine Zuteilung in $\Gamma =< P, v >$ sein.

Dieser sogenannte Shapley-Vektor ist dann als Lösung von $\Gamma =< P, v >$ anzusehen.

Wir wollen nun die von Shapley aufgestellten Axiome, die Φ erfüllen soll, motivierend einführen.

2.7.1.1

Die erste Forderung können wir inhaltlich so beschreiben: Offensichtlich schwache Spieler sollen vom Spiel nicht profitieren. Um die Forderung genauer zu beschreiben, definieren wir die Begriffe " Strohmann" und " Träger".

Definition. Sei $\Gamma =< P, v >$ ein kooperatives n-Personenspiel. Der Spieler $\{i\}$ heißt Strohmann in Γ, wenn $\forall K \subset P$ mit $i \notin K$ gilt

$$v(K \cup \{i\}) = v(K) + v(\{i\}).$$

Die Spielermenge $T \subset P$ heißt Träger in Γ, wenn T alle Spieler enthält, die keine Strohmänner sind.

Bemerkung.

1. Da v superadditiv sein muß, hat i.a. nur zu gelten

   $$v(K \cup \{i\}) \geq v(K) + v(\{i\})$$

   (da $K \cap \{i\} = \emptyset$ laut Voraussetzung). Ein Strohmann bringt in jede Koalition, in die er aufgenommen wird, nur seinen individuellen Anteil $v(\{i\})$ (den er laut Definition der Zuteilung wenigstens erhalten muß: $x_i \geq v(\{i\})$), ein. Seine Position ist im Spiel deshalb denkbar schwach. Der Ausschluß der Strohmänners ändert faktisch nichts am Spiel.

2. Wir vermerken, dass nach unserer Definition im Träger T auch Strohmänner enthalten sein können.

3. Es sei T ein Träger in Γ, $K \subset P$ eine Koalition in Γ. Dann haben wir:

   - jedes $i \in K \setminus T$ ist ein Strohmann,
   - $T \cap K$ besteht aus allen Spielern aus K, die keine Strohmänner sind und aus den Strohmännern, die sowohl in T als auch in K enthalten sind. Letztere sind aber nicht mehr in $K \setminus T$ enthalten.
   - $K = (T \cap K) \cup (K \setminus T)$,
   - $(T \cap K) \cap (K \setminus T) = \emptyset$.

Deshalb haben wir

$$v(K) = v((T \cap K) \cup (K \setminus T)).$$

Sei $i_1 \in K \setminus T$. Sei $i_2 \in (K \setminus T) \setminus \{i_1\}$

$$\begin{aligned} v(K) &= v((T \cap K) \cup (K \setminus T) \setminus \{i_2\} \cup \{i_1\}) \\ &\overset{i_1 \text{ ist Strohmann}, i_1 \notin (T\cap K)\cup(K\setminus T)\setminus\{i_1\}}{=} v((T \cap K) \cup (K \setminus T) \setminus \{i_1\}) + v(\{i_1\}) \\ &\overset{i_2 \in (K\setminus T)\setminus\{i_1\}}{=} v((T \cap K) \cup ((K \setminus T) \setminus \{i_1, i_2\}) \cup \{i_2\}) + v(\{i_1\}) \\ &\overset{i_2 \text{ ist Strohmann}, i_2 \notin (T\cap K)\cup(K\setminus T)\setminus\{i_1,i_2\}}{=} v((T \cap K) \cup (K \setminus T) \setminus \{i_1, i_2\}) + v(\{i_1\}) + v(\{i_2\}) \\ &= ... = v(T \cap K) + \sum_{i \in K\setminus T} v(\{i\}). \end{aligned}$$

<u>**Axiom 1**</u>: Ist $i \in P$ ein Strohmann in Γ, so sei $\Phi_i(v) = v(\{i\})$ (Effektivitätsaxiom).

<u>**Bemerkung.**</u>

1. Ein Strohmann erhält in der Zuteilung $\Phi(v) = [\Phi(v), ...\Phi(v)]$ nur seinen Garantiebetrag zugebilligt.

2. Sei T ein Träger in Γ und sei Axiom 1 erfüllt. Dann ist

$$v(T) = \sum_{i \in T} \Phi_i(v).$$

Beweis. Nach der obigen 3. Bemerkung ist für $K := P$

$$v(P) = v(T \cap P) + \sum_{i \in P\setminus T} v(\{i\})$$

Nach Axiom 1 ist $v(\{i\}) = \Phi_i(v)$, wenn i-Strohmann und nach obiger Bemerkung besteht $P \setminus T$ nur aus Strohmännern. Deshalb ist

$$\begin{aligned} v(P) &= v(T \cap P) + \sum_{i \in P\setminus T} \Phi_i(v) \\ &\overset{T\subset P,\ \text{d.h. } T\cap P = T}{=} v(T) + \sum_{i \in P\setminus T} \Phi_i(v) \end{aligned}$$

Nun soll aber $\Phi(v) = [\Phi_1(v), ..., \Phi_n(v)]$ eine Zuteilung sein, d.h. es muß gelten

$$v(P) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(v)$$

$\Rightarrow \sum_{i \in P} \Phi_i(v) = v(T) + \sum_{i \in P\setminus T} \Phi_i(v)$

$\overset{P = T \cup P\setminus T}{\Rightarrow} v(T) = \sum_{i \in T} \Phi_i(v)$ ◻

2.7.1.2

Die zweite Forderung von Shapley an Φ können wir inhaltlich kurz so beschreiben: Umnumerierungen der Spieler sollen keinen Einfluß auf die Lösung haben (d.h. der Namen der Spieler (z.B. ob erster oder 5. Spieler) darf sich nicht auf seinen Gewinn auswirken. Genauer: Sei π eine Permutation der Spieler:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \pi(1) & \pi(2) & ... & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Wir wollen $\Gamma =< P, v >$ ein Spiel $\Gamma^\pi = (P, v_\pi)$ zuordnen, wobei $\forall K \subset P$ gelte

$$v_\pi(K) := v(\pi^{-1}(K)) \tag{2.7.1}$$

(der Koalition K in Γ^π ist die Koalition $\pi^{-1}(K)$ in Γ zugeordnet)

Axiom 2: Sei π eine Permutation der Menge $\{1, ...n\}$. Dem Spiel $\Gamma = (P, v)$ sei der Vektor $\Phi(v) = [\Phi_1(v), ..., \Phi_n(v)]$ zugeordnet.

Dem Spiel $\Gamma^\pi = (P, v_\pi)$ mit v_π nach (2.7.1) sei der Vektor

$$\Phi(v_\pi) = [\Phi_1(v_\pi), \Phi_2(v_\pi), ..., \Phi_n(v_\pi)]$$

zugeordnet. Dann sei erfüllt, dass

$$\forall i \in P \quad \Phi_{\pi(i)}(v_\pi) = \Phi_i(v) \quad \text{(Symmetrieaxiom)}$$

2.7.1.3

Als dritte Forderung verlangt Shapley, dass die Beteiligung der Spieler an mehreren unabhängigen Spielen dazu führen soll, dass sich die Gewinne additiv gestalten. Genauer: Es seien $\Gamma_1 =< P, v^{(1)} >$ und $\Gamma_2 =< P, v^{(2)} >$ zwei kooperative n-Personenspiele. Dann ist $\Gamma =< P, v^{(3)} >$ mit $v^{(3)} = v^{(1)} + v^{(2)}$ auch ein kooperatives n-Personenspiel (d.h. aus der Superadditivität von $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$ folgt die Superadditivität. von $v^{(3)}$).

Axiom 3: Seien $\Gamma_1 =< P, v^{(1)} >$ und $\Gamma_2 =< P, v^{(2)} >$ zwei kooperative n-Personenspiele. Γ_1 werde der Vektor $\Phi(v^{(1)}) = [\Phi_1(v^{(1)}), ..., \Phi_n(v^{(1)})]$, Γ_2 werde der Vektor $\Phi(v^{(2)}) = [\Phi_1(v^{(2)}), ..., \Phi_n(v^{(2)})]$ zugeordnet. Dann soll dem Spiel $\Gamma_3 =< P, v^{(3)} >$ mit $v^{(3)} = v^{(1)} + v^{(2)}$ der Vektor

$$\Phi(v^{(3)}) = \Phi(v^{(1)}) + \Phi(v^{(2)})$$

zugeordnet werden .(Additionsaxiom)

Bemerkung. Gegen dieses Axiom bestehen unter den Spieltheoretikern Einwände psychologischer Art: Die Spieler seien nicht in der Lage Γ_1 und Γ_2 völlig unabhängig voneinander zu spielen (z.B. bezüglich Koalitionenbildung), so dass sich Γ_3 nicht als Summe von Γ_1 und Γ_2 ergibt.

2.7.2 Der Shapley-Vektor

Satz 2.17 (L.S. Shapley 1953). *Es bezeichne V_n die Menge der charakteristischen Funktionen in kooperativen n-Personenspielen (n fixiert, $V_n = \{v : 2^P \to \mathbb{R}, v(\emptyset) = 0, v\text{-superadditiv}\}$, $P = \{1, 2, ..., n\}$). Dann gilt :*

1. *$\forall n \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine Funktion $\Phi : V_n \to \mathbb{R}^n$, die den Axiomen 1-3 genügt ,nämlich die Funktion*

$$\begin{cases} \Phi(v) = [\Phi_1(v), \Phi_2(v), ..., \Phi_n(v)] \text{ mit} \\ \Phi_i(v) = \sum_{K \subset P,\ mit\ i \in K} \frac{(card(K)-1)!(n-card(K))!}{n!}(v(K) - v(K \setminus \{i\})) \end{cases} \tag{2.7.2}$$

2. *$\Phi(v)$ ist eine Zuteilung in $\Gamma =< P, v >$*

3. *Für strategisch äquivalente kooperative n-Personenspiele entsprechen die Φ einander. Genauer: Wenn für $\Gamma =< P, v >$ und $\Gamma' =< P, v' >$ existieren $k > 0$ und $c_i, i = 1, 2, ..., n$, so dass*

$$v'(K) = k\, v(K) + \sum_{i \in K} c_i, \forall K \subset P,$$

dann ist

$$\Phi_i(v') = k\Phi_i(v) + c_i,\ i = 1, 2, ..., n.$$

Bemerkung. 1. $\Phi(v)$ heißt Shapley-Vektor. Er kann als Lösung von $\Gamma =< P, v >$ angesehen werden.

2. Zur Interpretation von (2.7.2)

- $[v(K) - v(K \setminus \{i\})]$ ist der Zugewinn der Koalition $(K \setminus \{i\})$ von der Aufnahme von Spieler $\{i\}$ in die Koalition
- $n!$ =Anzahl der Permutationen von n Spielern,
- $(card(K) - 1)!$=Anzahl der Permutationen, wie die Schonkoalitionäre der Koalition beitreten konnten,
- $(n-card(K))!$=Anzahl der Permutationen, wie die Noch-Nicht-Koalitionäre der Koalition beitreten können, damit die große Koalition entsteht.
- $(card(K) - 1)!(n - card(K))!$=Anzahl der Möglichkeiten wie die große Koalition entstehen kann, unter der Bedingung, dass $\{i\}$ als $(card(K))$-ter in die Koalition aufgenommen wird. Bei jeder dieser Möglichkeiten bringt er den Zugewinn $[v(K) - v(K \setminus \{i\})]$ für die Koalition.

  Dieser Zugewinn wird gewichtet mit $\frac{(\ )!(\ )!}{n!}$. Es werden also alle Möglichkeiten, wie eine große Koalition aus der Koalition K entstehen kann, gleichbehandelt.

Die Zuteilung an $\{i\}$ erfolgt als Erwartungswert: Summation der anteiligen Beiträge über alle Koalitionen, an denen er beteiligt ist.

Satz 2.18. *Sei* $\Gamma =< P, v >$ *ein unwesentliches kooperatives n-Personenspiel. Dann gilt*

$$\Phi_i(v) = v(\{i\}),\ i = 1, 2, ..., n.$$

Bemerkung. In solch einem Spiel gibt es nur eine einzige Zuteilung $x = [v(\{1\}), v(\{2\}), ..., v(\{n\})]$. Dieses ist sowohl c-Kern, als auch N-M-Lösung, als auch Shapley-Vektor.

Satz 2.19. *Sei* $\Gamma =< P, v >$ *ein kooperatives 2-Personenspiel. Dann gilt für den Shapley-Vektor*

$$\Phi_i(v) = \frac{1}{2}[v(\{1, 2\}) + v(\{i\}) - v(\{3 - i\})],\ i = 1, 2.$$

2.7.3 Anwendung des Shapley-Vektors in Majoritätsspielen

Wir wollen Abstimmungen in Gremien betrachten, wo sich häufig eine Koalition durchsetzen kann, wenn sie ein bestimmtes Gewicht (=Majorität der Stimmen) hat.

Definition. Es sei $\Gamma =< P, v >$ ein kooperatives n-Personenspiel. Wir sagen, dass Γ ein gewichtetes Majoritätsspiel ist, falls es reelle Zahlen M(=Majorität), $g_1, g_2, ..., g_n \geq 0$ (g_i=Gewicht des i-ten Spielers, z.B. Anzahl der Stimmen des i-ten Spielers) gibt, wobei

1. $M > \frac{1}{2}(g_1 + g_2 + ... + g_n)$ gilt und die charakteristische Funktion v von Γ die Bedingung erfüllt: $\forall K \subset P$ gilt

2. $$v(K) = \begin{cases} 1, \text{ falls } \sum_{i \in K} g_i \geq M \\ 0, \text{ falls } \sum_{i \in K} g_i < M. \end{cases} \tag{2.7.3}$$

Bemerkung. 1. Unter 1., 2. und $g_i \geq 0, \forall i$, ist v wirklich eine charakteristische Funktion.

2. Ein Majoritätsspiel ist ein simples Spiel.

Satz 2.20. *Sei* $\Gamma =< P, v >$ *ein durch die Zahlen* $M, g_1, ..., g_n$ *definiertes gewichtetes Majoritätsspiel. Dann gilt für den Shapley-Vektor von* Γ

1. *Aus* $g_i = g_j$ *folgt* $\Phi_i(v) = \Phi_j(v)$,

2. *Aus* $g_i > g_j$ *folgt* $\Phi_i(v) \geq \Phi_j(v)$.

(Die Stärke des Spielers $\{i\}$ *(ausgedrückt durch sein Gewicht* g_i*) schlägt sich auch in seiner Shapley-Komponente nieder).*

Beispiel 1: UNO-Sicherheitsrat
Der Sicherheitsrat der UNO besteht aus 5 ständigen Mitgliedern (China, Frankreich, GB, Russland, USA) und weiteren 10 nichtständigen Mitgliedern, die jeweils für 2 Jahre gewählt werden.

Zur Annahme einer Resolution ist erforderlich, dass 9 der 15 Mitglieder der Resolution zustimmen, wobei jedoch die 5 ständigen Mitglieder ein Vetorecht besitzen. Dabei hat man sich auf folgende Interpretation geeinigt: Enthält sich eines der Mitglieder mit Vetorecht der Stimme, so gilt das als Zustimmung, d.h. die ständigen Mitglieder können entweder zustimmen oder ihr Vetorecht benutzen.

Wir wollen die Abstimmung im Sicherheitsrat als gewichtetes Majoritätsspiel mit den Konstanten $g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = g_5 = 7$, $g_6 = g_7 = ... = g_{15} = 1$, und $M = 39 = 5 * 7 + 4 * 1 (\hat{=} 9$ Zustimmungen) interpretieren. Es gilt $39 > \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{15} g_i = \frac{45}{2}$.

Wir haben es mit einem 15-Personenspiel zu tun. Nach Satz 2.20 gilt für den Shapley-Vektor $\Phi(v)$

$$\Phi_1(v) = ... = \Phi_5(v),$$

$$\Phi_6(v) = ... = \Phi_{15}(v).$$

Da das Spiel 0-1-reduziert ist und $\Phi(v)$ eine Zuteilung sein muß (und nach Satz 2.17 auch ist), gilt

$$v(P) = 1 = \sum_{i=1}^{15} \Phi_i(v) = 10\Phi_6(v) + 5\Phi_1(v),$$

d.h.

$$\Phi_6(v) = \frac{1}{10}(1 - 5\Phi_1(v)). \qquad (2.7.4)$$

Nach Satz 2.17 ist

$$\Phi_1(v) = \sum_{K \subset P,\ \text{mit}\ 1 \in K} \frac{(card(K) - 1)!(15 - card(K))!}{15!}(v(K) - v(K \setminus \{1\}))$$

Da $v(K), v(K \setminus \{1\}) \in \{0, 1\}$, so brauchen wir nur die Koalitionen K zu berücksichtigen, bei denen $v(K) = 1$ und gleichzeitig $v(K \setminus \{1\}) = 0$ (da $v(K) \geq v(K \setminus \{1\})$ gilt). Dann ist $[v(K) - v(K \setminus \{1\})] = 1$ (in den übrigen Fällen ergibt sich Null, und der Summand kann weggelassen werden).

Damit $v(K) = 1$, müssen die 5 ständigen Mitglieder in der Koalition sein (Enthaltung gilt als Zustimmung). Aufgrund des Vetorechtes von $\{1\}$ ist $v(K \setminus \{1\}) = 0$ in jedem Fall.

Deshalb ist $v(K) = 1$ immer dann, wenn von den 10 nichtständigen Mitgliedern wenigstens 4 und alle 5 ständigen Mitglieder in K enthalten sind (dann ist $\sum_{i \in K} g_i \geq M = 39$ (vgl. Definition von $v(K)$)).

Also: es muß $card(K) \geq 9$ sein.

Koalitionen der erwähnten Zusammensetzung mit $k_0 = card(K)$ Mitgliedern gibt es $\binom{10}{k_0 - 5}$ Stück.

Deshalb ist

$$\Phi_1(v) = \sum_{j=9}^{15} \frac{(j-1)!(15-j)!}{15!} \binom{10}{j-5}.$$

Es ergibt sich $\Phi_1(v) = 0,19627$, woraus wir nach (2.7.4) erhalten $\Phi_6(v) = 0,001865$.

Von den 100 Prozent der Macht des Sicherheitsrates besitzen die 5 Großmächte also $5\Phi_1(v)100 = 98,135$ Prozent und die 10 nichtständigen Mitglieder besitzen zusammen nur 1,865 Prozent.

Hier könnte die Kritik ansetzen, ob der Shapley-Vektor das richtige Modell (und $g_i = 7$ für eine Großmacht) für die Abstimmungsverhältrisse im Sicherheitsrat ist.

2.7.4 Beispiel 2: Lake Wobegon

Wir haben 8 Spieler = 6 Mitglieder + 1 Vorsitzender + 1 Bürgermeister . Das ist kein Majoritätsspiel.

Oben hatten wir das Spiel zur Demonstration eines Beispiels mit leerem c-Kern eingeführt.

Es bezeichne $\Phi_M(v)$ die Shapley-Komponente des Bürgermeisters.

Um $\Phi_M(v)$ nach Satz 2.17 zu berechnen, brauchen wir nur (siehe oben) die Koalitionen K zu berücksichtigen, bei denen $M \in K$ und K eine Gewinnerkoalition ist, aber $K \setminus \{M\}$ eine Verliererkoalition ist.

Nach den Regeln für die Annahme einer Vorlage im Stadtrat von Lake Wobegon sind die erwähnten Koalitionen diejenigen, die

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{den Bürgermeister enthalten, aber} \\ \text{das Veto des Bürgermeisters nicht überstimmen} \\ \text{können, wenn er aus der Koalition entfernt wird} \\ \text{und wenigstens 4 Mitglieder enthalten.} \end{array} \right.$$

Von solchen Koalitionen gibt es 4 Typen:

1. K enthält M, 3 Stadträte und den Vorsitzenden

2. K enthält M, 4 Stadträte

3. K enthält M, 3 Stadträte sowie den Vorsitzenden

4. K enthält M, 5 Stadträte

(Das Veto des Bürgermeisters kann nur überstimmt werden, wenn wenigstens 6 Stadträte (von 7) dafür sind)

Von Sorte (1) gibt es $\binom{6}{3} = 20$ Koalitionen und für sie ist

$$\frac{(card(K)-1)!(n-card(K))!}{n!} = \frac{(5-1)!(8-5)!}{8!} = \frac{1}{280}.$$

Von zweiten Typ gibt es $\binom{6}{4} = 15$ Koalitionen und

$$\frac{(card(K)-1)!(n-card(K))!}{n!} = \frac{(5-1)!(8-5)!}{8!} = \frac{1}{280}.$$

Von dritten Typ gibt es $\binom{6}{4} = 15$ Koalitionen und

$$\frac{(card(K)-1)!(n-card(K))!}{n!} = \frac{(6-1)!(8-6)!}{8!} = \frac{1}{168}.$$

Von vierten Typ gibt es $\binom{6}{5} = 6$ Koalitionen und

$$\frac{(card(K)-1)!(n-card(K))!}{n!} = \frac{(6-1)!(8-6)!}{8!} = \frac{1}{168}.$$

Nach Satz 2.17 ist damit

$$\Phi_M(v) = \frac{20}{280} + \frac{15}{280} + \frac{15}{168} + \frac{6}{168} = \frac{1}{4}.$$

Schließlich wollen wir $\Phi_C(v)$ =Shapley-Komponente des Vorsitzenden berechnen. Wieder geht es um Koalitionen K, die

$$\left\{\begin{array}{l}\text{den Vorsitzenden enthalten,}\\ \text{Gewinnerkoalitionen sind und ohne}\\ \text{den Vorsitzenden eine Verliererkoalition bilden.}\end{array}\right.$$

Davon gibt es 2 Typen von Koalitionen:

1. K enthält den Vorsitzenden, 3 Stadträte und den Bürgermeister (3 Stadträte dafür, 3 Stadträte dagegen, Vorsitzender dafür, Bürgermeister dafür, ohne Vorsitzenden haben die 3 Stadträte keine Mehrheit mehr).

2. K enthält den Vorsitzenden und 5 Stadträte (Bürgermeister legt Veto ein, ohne Vorsitzenden kommen die erforderlichen 6 Stimmen nicht zustande).

Von ersten Typ gibt es $\binom{6}{3} = 20$ Koalitionen. Ihr Gewicht ist $\frac{(5-1)!(8-5)!}{8!} = \frac{1}{280}$.

Von zweiten Typ gibt es $\binom{6}{5} = 6$ Koalitionen. Ihr Gewicht ist $\frac{(6-1)!(8-6)!}{8!} = \frac{1}{168}$.

Damit ist

$$\Phi_C(v) = \frac{20}{280} + \frac{6}{168} = \frac{3}{28}.$$

Die Shapley-Vektor-Komponenten der 6 Stadträte sind aus Symmetriegründen alle gleich.

Damit ergibt sich

$$v(P) = 1 = 6\Phi_1(v) + \Phi_M(v) + \Phi_C(v),$$

d.h. $\Phi_1(v) = \frac{1}{6}(1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{28}) = \frac{3}{28}$.

Schlußfolgerung: Der Bürgermeister hat wesentlich mehr Macht als ein Stadtrat oder der Vorsitzende. Erstaunlicher Weise ist die Macht eines Stadtrates gleich der des Vorsitzenden.

Literaturverzeichnis

[1] *J. Rosenmüller*: Kooperative Spiele und Märkte. Springer-Verlag, 1971.

[2] *B. Rauhut, N. Schmitz, E.-W. Zachow*: Spieltheorie. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1979.

[3] *Wang Jianhua*: The Theory of Games. Clarendon Press, Oxford, 1988.

[4] *M.J. Osborne, A. Rubinstein*: A Course in Game Theory. The MIT-Press, Cambridge, Massachusetts, 1994.

[5] *Jones A.J.*: Game Theory:Mathematical Models of Conflict. Hoorwood Publishing, 2000.

Index

$\mathfrak{A}$, 14
v_1^0, v_2^0, 13
0-1-reduzierte Form, 43

Alternative, irrelevante, 17
Äquivalenz, strategische, 40
Axiom
- Additions-, 74
- Effektivitäts-, 73
- Symmetrie-, 74

Beispiel
- 1, nichtkooperatives 3-Personenspiel, 32, 47, 54
- 3, Armer und Reicher, 25
- 3, kooperatives Spiel, 34, 48, 55
- 5, Autoverkauf, 55
- 6, Lake Wobegon, 57, 78
- 7, Expedition, 58
- Jazz-Orchester, 37, 48, 53
- Streit in der Ehe, 6, 22
- UNO-Sicherheitsrat, 77

c-Kern, 51

Dominanz
- 49
- bei der Koalition, 48

Funktion, charakteristische, 30

Imputationen, 38

Koalition
- 30
- Gewinner-, 66
- minimale Gewinner-, 66
- Verlierer-, 66

Konvexifizierung, 12

N-M-Lösung, 63

Optimalität, schwache Pareto, 15

Randomisierung, 13
Rationalität
- Gruppen-, 38
- individuelle, 38
- schwache individuelle, 15

Spiel
- Konstantsummen-, 60
- kooperatives n-Personen-, 31
- kooperatives n-Personennull-, 42
- Majoritäts-, 76
- nichtkooperatives, 5
- simples, 66
- THREE, 68
- unwesentliches, 39
- wesentliches, 39

status quo, 14
Strohmann, 72
Symmetrie, schwache, 16

Träger, 72
Transformationen, positive lineare, 16

Verhandlungslösung
- 15
- Nash'sche, 22

Verhandlungsmenge, 13

Zuteilung, 38