Technische Universität Chemnitz

Fakultät für Mathematik

Vorlesung Spieltheorie

Prof. Beer, Wintersemester 2002/2003

Mitschrift von *Christin.Seifert@informatik.tu-chemnitz.de* und
Jan.Parthey@informatik.tu-chemnitz.de

17. Februar 2003

Inhaltsverzeichnis

Hinweis

Die Mitschrift wurde so gewissenhaft wie möglich angefertigt. Wir übernehmen allerdings keine Garantie für Richtigkeit und Vollständigkeit.

Christin Seifert und Jan Parthey

Literaturliste

1. E.Burger: Einführung in die Spieltheorie
   Walter deGruyter & Co, Berlin 1959

2. B. Rauhut, N. Schmitz, E.-W. Zachow: Spieltheorie
   Teubner-Verlag, Stuttgart 1979

3. S. Berninghaus, K.-M. Erhart, W. Güth: Strategische Spiele — Eine Einführung in die Spieltheorie
   Springer-Verlag, Berlin 2001

4. G. Owen: Game Theory
   Saunders, Philadelphia 1968
   Kommentar: Lehrbuch

5. N.N. Vorob'ev:
   Game theory — Lectures for economists and system scientists
   Springer-Verlag, Berlin 1977
   Kommentar: gut lesbar

6. Wang Jianhua: The theory of games
   Clarendon Press, Oxford 1988
   Kommentar: Vorlesung angelehnt

7. N.N. Vorob'ev: Foundations of game theory
   Birkhäuser-Verlag, Basel 1994

8. P. Morris: Introduction to game theory
   Springer-Verlag, Berlin 1994
   Kommentar: liest sich einfach

9. L.A. Petrosjan, N.A. Zenkevich: Game theory
   World Scientific, River Edge 1996
   Kommentar: sehr mathematisch

10. F. Forgo', J. Sze'p, F. Szidarovsky: Introduction to the theory of games
    Kluwer Academic Publish., Dordrecht 1999

11. A.J. Jones: Game theory — Mathematical models of conflict
    Horwood Publishing, Chichester 2000

- in Optimierung: optimale Lösung (wenn sie existiert), kann realisiert werden und Optimierer erhält Gewinn für diese Lösung (Niemand kann ihn an Realisierung hindern)
- Spieltheorie: im Grundmodell haben wir wenigstens zwei Entscheidungsträger: Spieler

$$P_1, P_2, \ldots, P_n.$$

  Dabei hat jedes P_i seine Entscheidungsmenge S_i und wählt ein $x^i \in S_i$. Der Gewinn von P_i beträgt

$$H_i(x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots, x^n).$$

  $\Rightarrow$ Gewinn von P_i hängt nicht nur von seiner eigenen Entscheidung ab, sondern von den Entscheidungen aller Spieler.

  – P_i ist betrebt, $H_i(x^1, \ldots, x^n)$ zu maximieren. Er kann aber nicht erwarten, dass er

$$H_i^* = \max\left\{H_i(x^1, \ldots, x^n) : x^1 \in S^1,\ x^2 \in S^2,\ \ldots,\ x^n \in S^n\right\}$$

  erreichen kann. $\Rightarrow$ Interessenskonflikt

- Spieltheorie betrachtet verschiedene Modelle. Sie stellt die Frage danach, was als Lösung des Spiels angesehen werden könnte. Mathematiker untersuchen folgende Fragen:
  - $\exists$ ein Kompromiss?
  - Welche Eigenschaften hat er?
  - Wie kann man ihn finden?

0 Beispiele von Spielen

0.1 Stein-Schere-Papier

- 2 Spieler
- Papier schlägt Stein, Stein schlägt Schere, Schere schlägt Papier
- Gewinner: +1, Verlierer: −1, unentschieden (gleiches Zeichen): ±0
- Gewinnmatrix (für Spieler 1):

		Spieler 2		
		Stein	Schere	Papier
Spieler 1	Stein	0	1	−1
	Schere	−1	0	1
	Papier	1	−1	0

- Bezeichnung des Spieles:
  - *Matrixspiel*
  - *endliches 2-Personen Nullsummenspiel* (Summe der Gewinne)

0.2 Ein Duell

- 2 Personen duellieren sich
  - laufen auf gerader Linie aufeinander zu
  - jeder entscheidet, wann er schießt
  - jeder hat nur einen Schuss

- P_1 schießt, wenn $\overline{P_1P_2} = x$ und trifft mit Wkt. $p_1(x)$.
- P_2 schießt, wenn $\overline{P_1P_2} = y$ und trifft mit Wkt. $p_2(y)$.
- Gewinne: $+1$ für Treffer landen und -1 für selbst getroffen werden
- mit (bzw. ohne) Schalldämpfer, d.h. der eine Spieler weiß nicht (bzw. weiß), wann der andere geschossen hat

- betrachten den zu erwartenden Gewinn von P_1 für beide Fälle:

  1. ohne Schalldämpfer
     → man hört den Schuss des anderen

$$H_1(x,y) = \begin{cases} (+1)p_1(x) + (-1)(1-p_1(x)) & x > y \\ (+1)p_1(x)(1-p_2(y)) + (-1)(1-p_1(x))(p_2(y)) & x = y \\ (-1)p_2(y) + (+1)(1-p_2(y)) & x < y \end{cases}$$

     Hinweis: Wenn $x > y$ (Fall 1), dann schießt P_2 später. D.h. wenn P_1 nicht getroffen hat, dann setzt P_2 ihm die Pistole auf die Brust und gewinnt sicher.

  2. mit Schalldämpfer
     → man hört nichts

$$H_1(x,y) = \begin{cases} (+1)p_1(x) + (-1)(1-p_1(x))p_2(y) & x > y \\ (+1)p_1(x)(1-p_2(y)) + (-1)(1-p_1(x))(p_2(y)) & x = y \\ (-1)p_2(y) + (+1)(1-p_2(y))p_1(x) & x < y \end{cases}$$

- Bezeichnung des Spieles:
  - *Kontinuierliches 2-Personen Nullsummenspiel*
  - *Spiel auf Einheitsquadrat*
    Per Vereinbarung ist zu Beginn $\overline{P_1P_2} = 1$ und daher $x, y \in [0,1]$

0.3 Lake Wobegon Spiel

- „Lake Wobegon“ wird von 7-köpfigem Stadtrat + Bürgermeister regiert
- Vorlage gilt als angenommen, wenn
  - entweder Mehrheit der Stadträte dafür ist und Bürgermeister kein Veto einlegt (Vorsitzender des Stadtrates stimmt nur bei Stimmengleichheit der sechs übrigen Stadträte mit ab)
  - oder, bei Veto des Bürgermeisters, wenn bei erneuter Abstimmung wenigstens sechs Stadträte (inklusive des Vorsitzenden) dafür sind.
- Bezeichnung des Spieles:
  - gehört zu den *kooperativen Spielen* (nicht Teil dieser Vorlesung)
  - Absprache des Verhaltens ist möglich
  - Koalitionen können gebildet werden

0.4 Dilemma der Arrestanten

- Nach einem Raubüberfall werden P_1 und P_2 ergriffen. Der Sheriff vermutet, dass sie die Täter waren. P_1 und P_2 werden sofort voneinander isoliert (keine weiteren Absprachen möglich). Der Sheriff macht jedem der beiden folgenden Vorschlag:
  - „Wenn Sie sich schuldig bekennen und der andere nicht, dann erhalten Sie nur 1 Jahr (als Kronzeuge)."
  - „Wenn der andere gleichzeitig gesteht, bekommen Sie 5 Jahre, weil Ihre Aussage keinen Ermittlungsvorteil gebracht hat."
  - „Wenn Sie nicht gestehen, aber der andere gesteht, dann bekommen Sie 10 Jahre."
  - „Wenn keiner von Ihnen beiden gesteht, dann bekommen Sie beide je 2 Jahre für illegalen Waffenbesitz (untergeordnetes Begleitverbrechen)."
- Seien K und D wie folgt definiert:
  - K = Kooperation der Verbrecher untereinander, d.h. der entsprechende Spieler hält dicht
  - D = Denunziation, d.h. Spieler gibt Verbrechen zu und beschuldigt gleichzeitig den anderen mit
- Gewinne von P_1 und P_2:

$\boxed{P_1}$

		Spieler 2	
		K	D
Spieler 1	K	−2	−10
	D	−1	−5

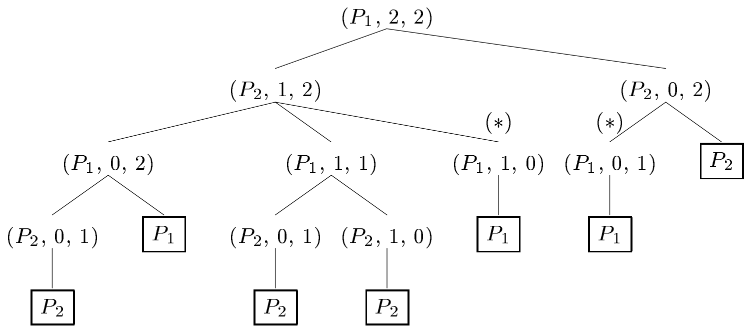
$\boxed{P_2}$

		Spieler 2	
		K	D
Spieler 1	K	−2	−1
	D	−10	−5

- Bezeichnung des Spieles:
  - *2-Personen Nicht-Nullsummenspiel* bzw.
  - *2-Personen Nicht-Konstantsummenspiel*, denn die Summe der Strafen für P_1 und P_2 ist nicht in jedem Fall gleich

0.5 Ein Nim-Spiel

- Auf dem Tisch liegen 2 Haufen Streichhölzer.
- Jeder Haufen enthält n Stück.
- P_1 und P_2 nehmen abwechselnd eine beliebige (aber positive) Anzahl Hölzer von einem der beiden Haufen weg.
- Verloren hat, wer das letzte Streichholz nehmen muss.
- Wir betrachten den Fall $n = 2$.
- P_1 beginne und nehme zuerst vom Haufen 1.
- Im folgenden Baum steht jeder Knoten für den aktuellen Zustand:
  (Wer ist dran, Anzahl Hölzer im ersten Haufen, Anzahl Hölzer im zweiten Haufen).
- jeweiliger Verlierer ist, wer im Blatt steht



- durch geschickte Zugwahl (Wahl von $(*)$) kann P_2 in diesem Spiel immer gewinnen
- Bezeichnung des Spieles:
  - *Positionsspiel mit vollständiger Information*, d.h. die Spieler wissen genau, in welchem Knoten sie sich befinden. Bei Skat z.B. ist das nicht der Fall.

1 Matrixspiele

1.1 Endliche 2-Personen Nullsummenspiele

- Gegeben:
  - 2 Spieler
  - 2 endliche Mengen S_1, S_2, wobei
    $S_1 := \{\sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^m\}$
    $S_2 := \{\delta^1, \delta^2, \dots, \delta^n\}$
  - 2 Gewinnfunktionen H_1, H_2, wobei

$$\begin{cases} H_1, H_2 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R} \\ H_2(\sigma^i, \delta^j) = -H_1(\sigma^i, \delta^j) \text{ (Nullsummenspiel)} \end{cases}$$

- Spielregeln:
  - P_1 wählt (unabhängig von P_2) ein Element σ^i aus S_1.
  - P_2 wählt (unabhängig von P_1) ein Element δ^j aus S_2.
  - Nach der Wahl ist das Spiel zu Ende.
  - P_1 erhält $H_1(\sigma^i, \delta^j)$ und P_2 erhält $H_2(\sigma^i, \delta^j)$ als Gewinn.
  - Es wird davon ausgegangen, dass P_1 und P_2 voll informiert sind, d.h. sie kennen S_1, S_2, H_1, H_2 und den Ablauf.
  - Beide Spieler sind an einem für sie positiven Ausgang des Spiels interessiert. D.h. sie wollen ihren individuellen Gewinn maximieren.
  - Die Spieler sind vorsichtig und wollen kein Risiko eingehen.
- Bezeichnungen:
  - $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H_1, H_2 \rangle$ — beschriebenes *Spiel*
  - S_i — *Strategiemenge* von P_i
  - H_i — *Gewinnfunktion* von P_i (H_i negativ — Verlustfunktion)
  - $\sigma^i \in S_1$ — *reine Strategie* von P_1,
    $\delta^j \in S_2$ — *reine Strategie* von P_2

– (σ^i, δ^j) — sogenannte *Situation* im Spiel Γ

Offensichtlich müssen wir nur den Fall betrachten, dass $\sigma^i = i$, $\delta^j = j$ und $H_1(\sigma^i, \delta^j) = A(i,j)$. Setze $H := H_1$. Damit $H_2 = -H$. Das heißt:

- $S_1 = \{1, 2, \ldots, m\}$
- $S_2 = \{1, 2, \ldots, n\}$
- H ist gegeben durch die Matrix $A = \{a_{ij}\}_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$

Def. 1.1 (Matrixspiel)
Wir sagen, dass ein *Matrixspiel* $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, A \rangle$ gegeben ist, wenn eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

aus reellen Einträgen a_{ij} gegeben ist und das Spiel so abläuft, dass P_1 eine Zeile und P_2 eine Spalte aus A wählt. Anschließend erhält P_1 von P_2 den Gewinn a_{ij} ausgezahlt ($a_{ij} < 0$ bedeutet, P_1 zahlt an P_2 den Betrag von a_{ij}).

Bemerkung 1.1
Es gelten dabei weiterhin die oben vereinbarten Spielregeln.

Motivation: Sei $A = \{a_{ij}\}_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ gegeben. Wenn P_1 die Zeile i wählt, dann erhält er wenigstens einen Gewinn von

$$\min_{1 \le j \le n} a_{ij}$$

(= sicherer Mindestgewinn bei der Wahl i durch P_1). Da P_1 frei ist in der Wahl der Zeile, wird er diejenige wählen, deren Mindestgewinn für ihn möglichst groß ist, d.h. er wählt $i = i_0$ so, dass

$$\min_{1 \le j \le n} a_{i_0 j} = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij} =: \underline{v} \qquad \text{(unterer Spielwert)}$$

In H stehen die Zahlungen von P_2 an P_1. Wenn P_2 Spalte j wählt, dann hat er höchstens das Maximum in der Spalte j

$$\max_{1 \le i \le m} a_{ij}$$

an P_1 zu zahlen (= Maximalverlust von P_2 bei der Wahl j). Da P_2 frei ist in der Wahl der Spalte, wird er diejenige wählen, deren Maximalverlust für ihn möglichst klein ist, d.h. er wählt $j = j_0$ so, dass

$$\max_{1 \le i \le m} a_{ij_0} = \min_{1 \le j \le n} \max_{1 \le i \le m} a_{ij} =: \overline{v} \qquad \text{(oberer Spielwert)}$$

21.10.2002

Lemma 1.1 *In jedem Matrixspiel ist $\underline{v} \le \overline{v}$.*

Beweis 1.1 (erster Weg)
- Wenn $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$, dann

$$\forall i, j : \min_{1 \le k \le n} a_{ik} \le a_{ij} \le \max_{1 \le l \le m} a_{lj}$$

- Rechte Seite ist unabhängig von i, daher:

$$\forall j : \underbrace{\max_{1\leq i\leq m} \min_{1\leq k\leq n} a_{ik}}_{\underline{v}} \leq \max_{1\leq l\leq m} a_{lj}$$

- Linke Seite ist konstant bezüglich j. Es folgt:

$$\underbrace{\max_i \min_k a_{ik}}_{\underline{v}} \leq \underbrace{\min_j \max_l a_{lj}}_{\overline{v}}$$

#

Beweis 1.1 (zweiter Weg)

- $\underline{v} = \max\limits_{1\leq i\leq m} \min\limits_{1\leq j\leq n} a_{ij}$ = größtes Zeilenminimum
- $\overline{v} = \min\limits_{1\leq j\leq m} \max\limits_{1\leq i\leq n} a_{ij}$ = kleinstes Spaltenmaximum
- Bezeichne (i^*, j^*) die Position des (bzw. eines) größten Zeilenminimums $\underline{v}$. Dann sind die restlichen Elemente der Zeile i^* größer oder gleich $a_{i^*j^*}$. Gäbe es nun ein $\overline{v}$, sodass $\underline{v} > \overline{v}$, so müsste es in seiner Spalte ein Maximum sein. In der Zeile i^* gäbe es jedoch im Widerspruch dazu ein größeres Element, weil dort ja alle Elemente größer oder gleich $\underline{v}$ waren und somit nach Annahme größer als $\overline{v}$.

#

Beispiel 1.1
Stein-Schere-Papier

		Spieler 2			
		Stein	Schere	Papier	Zeilenminima
Spieler 1	Stein	0	1	−1	−1
	Schere	−1	0	1	−1
	Papier	1	−1	0	−1
	Spaltenmaxima	1	1	1	

Für das Beispiel ist somit: $\underline{v} < \overline{v}$

Beispiel 1.2
Sei $A = \{a_{ij}\}_{i=0}^{3}{}_{j=0}^{2}$, wobei $a_{ij} = i(j-i) + j(j+i) = j^2 - i^2 + 2ij$.

				Zeilenminima
$A =$	$\boxed{0}$	1	4	$\boxed{0}$
	−1	2	7	−1
	−4	1	8	−4
	−9	−2	7	−9
Spaltenmaxima	$\boxed{0}$	2	8	

Für das Beispiel ist somit: $\underline{v} = \overline{v}$

1.2 Lösbarkeit in reinen Strategien

- Sei $\underline{v} = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ und $\overline{v} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$.
- Es muss ein $i^* \in \{1, 2, \ldots, m\}$ existieren, sodass $\underline{v} = \min\limits_j a_{i^*j}$.
- Es muss ein $j^* \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existieren, sodass $\overline{v} = \max\limits_i a_{ij^*}$.
- Es sei $\underline{v} = \overline{v}$. Damit auch: $\min\limits_j a_{i^*j} = \max\limits_i a_{ij^*}$.

- Generell muss gelten: $\underline{v} = \min_j a_{i^*j} \le a_{i^*j^*} \le \max_i a_{ij^*} = \overline{v}$.
- Wegen Voraussetzung $\underline{v} = \overline{v}$, gilt:

$$\min_j a_{i^*j} = a_{i^*j^*} = \max_i a_{ij^*} \tag{$\circ$}$$

Das heißt, es existiert ein (i^*, j^*) so, dass $(\circ)$ gilt.

- Es gelte $(\circ)$. Damit gilt auch:

$$\begin{aligned} \forall j:&\quad a_{i^*j^*} \le a_{i^*j} \\ \forall i:&\quad a_{i^*j^*} \ge a_{ij^*} \end{aligned} \tag{+}$$

Def. 1.2 (Reine Strategie, Sattelpunkt, Gleichgewichtssituation)
Gegeben sei ein Spiel mit Matrix $A = \{a_{ij}\}_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$. Wenn $i^* \in \{1, 2, \dots, m\}$ und $j^* \in \{1, 2, \dots, n\}$ existieren, so dass (+) gilt, dann sagen wir, dass
i^* eine *reine Strategie* von P_1 im Spiel mit A und
j^* eine *reine Strategie* von P_2 im Spiel mit A ist.
Weiterhin heißt (i^*, j^*) *Sattelpunkt (saddle point)* (kurz: *SP*) in der Matrix A, oder auch *Gleichgewichtssituation* im Spiel mit A.

Lemma 1.2 *Gegeben sei ein Spiel mit Matrix A. Es existiert in diesem Spiel ein Sattelpunkt (i^*, j^*) genau dann, wenn $\underline{v} = \overline{v}$.*

Beweis 1.2
$\Leftarrow$ aus $\underline{v} = \overline{v}$ folgt, dass (i^*, j^*) existiert, sodass (+) gilt.

$\Rightarrow$ Sei (+) erfüllt. Zu zeigen ist, dass daraus $\underline{v} = \overline{v}$ folgt. Sei also

$$\forall j: \quad a_{i^*j^*} \le a_{i^*j} \tag{$\triangle$}$$
$$\forall i: \quad a_{i^*j^*} \ge a_{ij^*} \tag{$\triangle\triangle$}$$

$$(\triangle) \Rightarrow \min_{1\le j\le n} a_{i^*j} \ge a_{i^*j^*} \Rightarrow \qquad \underline{v} = \max_{1\le i\le m} \min_{1\le j\le n} a_{ij} \ge a_{i^*j^*} \tag{1}$$
$$(\triangle\triangle) \Rightarrow a_{i^*j^*} \ge \max_{1\le i\le m} a_{ij^*} \Rightarrow \qquad a_{i^*j^*} \ge \min_{1\le j\le n} \max_{1\le i\le m} a_{ij} = \overline{v} \tag{2}$$

- (1), (2) $\Rightarrow \underline{v} \ge \overline{v}$.
- Nach Lemma 1.1 gilt bereits: $\underline{v} \le \overline{v}$.
- Somit: $\underline{v} = \overline{v}$.

#

Bemerkung 1.2

1. Ein SP in der Matrix A zeichnet sich dadurch aus, dass er gleichzeitig mit dem kleinsten Element in seiner Zeile und dem größten Element seiner Spalte zusammenhängt.
2. Da im Spiel *Stein-Schere-Papier* $\underline{v} \ne \overline{v}$, kann in diesem Spiel kein Sattelpunkt und damit auch keine optimale reine Strategie existieren.
3. Vorsicht: Wenn im Spiel mit A (i^*, j^*) ein SP ist, dann bedeutet das nicht, dass (i, j) auch ein SP sein muss, falls $a_{i^*j^*} = a_{ij}$. Zum Bsp.:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & 6 \\ -4 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Die optimale Strategie von P_1 ist $i^* = 3$, die von P_2 ist $j^* = 3$. In der Matrix A ist $a_{2,4} = 2$, jedoch *kein* Sattelpunkt.

4. Wenn eine Matrix einen SP besitzt, dann ist nach den Vorstellungen der Spieltheorie das Spiel gelöst (siehe Definition). Das optimale Vorgehen von P_1 und P_2 und der Wert des Spiels sind wohldefiniert.

Lemma 1.3 (Rechteckeigenschaft) *Seien sowohl (i^*, j^*) als auch $(\hat{\imath}, \hat{\jmath})$ Sattelpunkte im Spiel mit der Matrix A. Dann gilt: Auch $(i^*, \hat{\jmath})$ und $(\hat{\imath}, j^*)$ sind Sattelpunkte im Spiel mit A. Es gilt außerdem: $a_{\hat{\imath}\hat{\jmath}} = a_{\hat{\imath}j^*} = a_{i^*\hat{\jmath}} = a_{i^*j^*}$.*

Bemerkung 1.3
Lemma 1.3 sagt: Um optimal zu spielen, muss P_1 nicht wissen, aus welchem der Sattelpunkte P_2 seine optimale Strategie wählt.

Beweis 1.3
(i^*, j^*) ist SP $\Rightarrow$

$$\forall j : a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j} \tag{1}$$
$$\forall i : a_{i^*j^*} \geq a_{ij^*} \tag{2}$$

$(\hat{\imath}, \hat{\jmath})$ ist ebenfalls SP $\Rightarrow$

$$\forall j : a_{\hat{\imath}\hat{\jmath}} \leq a_{\hat{\imath}j} \tag{3}$$
$$\forall i : a_{\hat{\imath}\hat{\jmath}} \geq a_{i\hat{\jmath}} \tag{4}$$

Wollen nun zeigen, dass $(i^*, \hat{\jmath})$ ebenfalls ein SP ist (Beweis für $(\hat{\imath}, j^*)$ erfolgt analog).

$$a_{i^*\hat{\jmath}} \overset{(1)}{\geq} a_{i^*j^*} \overset{(2)}{\geq} a_{\hat{\imath}j^*} \overset{(3)}{\geq} a_{\hat{\imath}\hat{\jmath}} \overset{(4)}{\geq} a_{i^*\hat{\jmath}}$$

Dies ist aber nur möglich, wenn überall „=“ steht.
Um nachzuweisen, dass $(i^*, \hat{\jmath})$ auch ein Sattelpunkt ist, müssen wir zeigen:

$$\forall j : a_{i^*\hat{\jmath}} \leq a_{i^*j} \tag{5}$$
$$\forall i : a_{i^*\hat{\jmath}} \geq a_{i\hat{\jmath}} \tag{6}$$

- (5) gilt nach (1), da $a_{i^*j^*} = a_{i^*\hat{\jmath}}$ bereits gezeigt wurde
- (6) gilt nach (4), da $a_{\hat{\imath}\hat{\jmath}} = a_{i^*\hat{\jmath}}$ bereits gezeigt wurde

#

23.10.2002

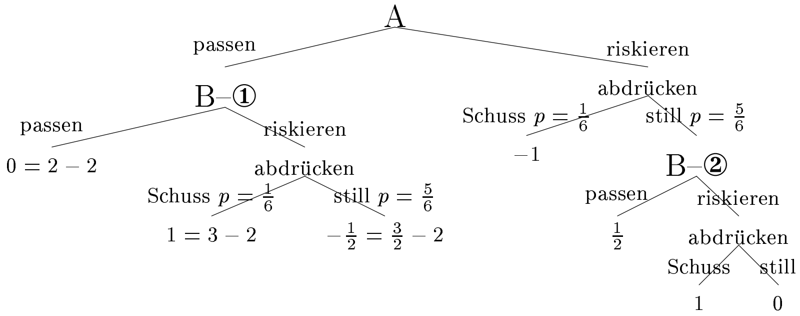
1.3 Russisch Roulette (russ.: franz. Roulette)

1.3.1 Spielregeln

- A, B — Spieler
- Jeder hat genügend viele Packungen Zigaretten.
- Es gibt einen Revolver mit 6 Patronenfächern, aber nur 1 Patrone.
- Erst ist A am Zug, dann B. Spätestens danach ist das Spiel zu Ende. Sollte ein Schuss ertönen, endet das Spiel bereits vorher.
- Der aktuelle Spieler bekommt den Revolver und hat 2 Möglichkeiten:

  – „passen“ — den Revolver weitergeben, dafür aber 2 Packungen Zigaretten in den Pool legen
  – „riskieren“ — 1 Packung Zigaretten in den Pool geben, dann die Trommel rotieren lassen. Nach Stillstand den Revolver an die Schläfe halten und abdrücken.

- Überlebt nur 1 Spieler, dann bekommt er zum Schluss alles aus dem Pool.
- Überleben beide, so bekommt jeder die Hälfte.
- Als *Gewinn* eines Spielers gelten die hinzugewonnen Packungen zu vor dem Spiel, d.h. Auszahlung minus Einsatz.



1.3.2 Analyse

- Wir legen für jeden Spieler seine möglichen Strategien fest. Eine Strategie gibt für jeden Knoten des Baumes, in dem der Spieler am Zug ist, an, wie er sich verhalten würde.
- A hat nur ganz am Anfang eine Entscheidung zu treffen und damit 2 Strategien zur Auswahl:
  – A_{I}: passen
  – A_{II}: riskieren
- B muss in ① und ② Entscheidungen treffen und kann somit aus 4 Möglichkeiten wählen:
  – B_{I}: in ① passen, in ② riskieren
  – B_{II}: in ① passen, in ② passen
  – B_{III}: in ① riskieren, in ② riskieren
  – B_{IV}: in ① riskieren, in ② passen
- Das Spiel ist damit ein endliches 2-Personen-Spiel. Da der Pool hinterher geleert wird, gewinnt A genau das, was B verliert. Damit handelt es sich um ein Nullsummenspiel.
  $\Rightarrow$ Das Spiel ist ein Matrix-Spiel (endliches Nullsummenspiel).

	B_{I}	B_{II}	B_{III}	B_{IV}	Zeilenminima
A_{I}	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
A_{II}	$-\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{36}$
Spaltenmaxima	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$	

- $H(A_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{I}}) = 0 = H(A_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{II}})$
- $H(A_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{III}}) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} = H(A_{\mathrm{I}}, B_{\mathrm{IV}})$
- $H(A_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{I}}) = \frac{1}{6}(-1) + \frac{5}{6}(\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot 0) = -\frac{1}{36} = H(A_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{III}})$
- $H(A_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{II}}) = \frac{1}{6}(-1) + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = H(A_{\mathrm{II}}, B_{\mathrm{IV}})$
- Existiert ein Sattelpunkt? Ja, bei $(i^* = 2, j^* = 3)$ ist $a_{i^* j^*}$ gleichzeitig Zeilenminimum und Spaltenmaximum (d.h. A muss riskieren und B muss riskieren). Der Wert des Spieles ist damit $\underline{v} = \overline{v} = -\frac{1}{36}$.

1.4 Gemischte Strategien

1.4.1 Motivation

- Betrachten Matrixspiele. Wenn $\underline{v} = \overline{v}$, dann sagt Abschnitt 1.2, was unter einer Lösung verstanden werden soll.
- Betrachten $\underline{v} \neq \overline{v}$. Nach Lemma 1.1 auf Seite 5 heißt das $\underline{v} < \overline{v}$.
- Betrachten folgende Matrix A:

			Zeilenminima
$A =$	5	1	1
	3	4	3
Spaltenmaxima	5	4	

  Es ist $\underline{v} = 3$ und $\overline{v} = 4$, d.h. das Spiel ist nicht in reinen Strategien lösbar.

- konservatives Konzept:
  - P_1 wähle ein i_0 so, dass $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j a_{i_0 j}$.
  - P_2 wähle ein j_0 so, dass $\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = \max\limits_i a_{ij_0}$.
  - Für das Spiel mit A würde das bedeuten: $i_0 = 2$, $j_0 = 2$.
- Durch Nachsimulieren der Gedanken des Gegners kann man zum Schluss kommen, dass das konservative Konzept $i_0 = 2$, $j_0 = 2$ nicht so gut ist (instabil).
- Wir wollen zulassen, dass die Spieler nicht mehr unbedingt in reinen Strategien spielen, sondern in sogenannten *gemischten Strategien*. Das heißt, P_1 wählt die Zeile i nur mit einer Wahrscheinlichkeit $p_i \geq 0 \quad \forall i$, wobei $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. Analog dazu wählt P_2 die Spalte j nur mit einer Wahrscheinlichkeit $q_j i \geq 0 \quad \forall j$, wobei $\sum_{j=1}^n q_j = 1$.
- In unserem Beispiel wähle P_1 Zeile 1 mit $p_1 = \frac{1}{4}$ und Zeile 2 mit $p_2 = \frac{3}{4}$. Wenn P_2 Spalte 1 wählt, dann ist der zu erwartende Gewinn von P_1:

$$H = \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{14}{4} > \underline{v} = 3$$

  Wählt P_2 dagegen Spalte 2, so ist der zu erwartende Gewinn von P_1:

$$H = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 4 = \frac{13}{4} > \underline{v} = 3$$

  Das bedeutet, P_1 kann mit der gemischten Strategie $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{3}{4}$ mehr als $\underline{v}$ als Gewinn erhalten.

- Der Übergang vom Spiel in *reinen Strategien* zum Spiel in *gemischten Strategien* wird u.a. deswegen heute überwiegend akzeptiert.

Def. 1.3 (Spiel, gemischte Erweiterung, gemischte Strategie)
Sei Matrix $A = (a_{ij})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ gegeben.
Sei $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H \rangle$, wobei $S_1 = \{1, 2, \ldots, m\}$ — Zeilenindizes
$S_2 = \{1, 2, \ldots, n\}$ — Spaltenindizes
$H : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$, $H(i, j) = a_{ij}$
Γ ist das folgende Spiel:
- P_1 wählt $i \in S_1$, P_2 wählt $j \in S_2$.
- Anschließend zahlt P_2 an P_1 den Betrag a_{ij}.

Wir führen nun das Spiel $\hat{\Gamma} = \left\langle P_1, P_2, \hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{H} \right\rangle$ ein,
wobei $\hat{S}_1 = \{x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0\ (\forall i),\ \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$
$\hat{S}_2 = \{y \in \mathbb{R}^n : y_j \geq 0\ (\forall j),\ \sum_{j=1}^m y_j = 1\}$
$\hat{H} : \hat{S}_1 \times \hat{S}_2 \to \mathbb{R},\ \hat{H}(x,y) = \langle x, Ay \rangle$
Spiel $\hat{\Gamma}$ läuft wie folgt ab:

- P_1 wählt $x \in \hat{S}_1$, P_2 wählt $y \in \hat{S}_2$.
- Anschließend zahlt P_2 an P_1 den Betrag $\hat{H}(x,y)$.

Bezeichungen:

- $\hat{\Gamma}$ heißt *gemischte Erweiterung* des Spieles Γ.
- $x \in \hat{S}_1$ heißt *gemischte Strategie* von P_1.
- $y \in \hat{S}_2$ heißt *gemischte Strategie* von P_2.

Ende Def.

28.10.2002

Bemerkung 1.4

1. Aus $m = 2$ folgt
   $\hat{S}_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1\}$
   Aus $m = 3$ folgt
   $\hat{S}_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$
2. $\hat{S}_1$ ist die Menge aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen über S_1.
3. $\langle x, Ay \rangle$ ist der erwartete Gewinn im Spiel $\hat{\Gamma}$. P_1 spiele x und P_2 spiele y.
   Wenn P_1 die i-te Zeile wählt und P_2 die j-te Spalte mit Wahrscheinlichkeit y_i, dann ist der erwartete Gewinn von P_1 $\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j$.
   Wenn nun P_1 die i-te Zeile mit Wahrscheinlichkeit x_i wählt, dann ist der erwartete Gewinn von P_1 $\sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = \langle x, Ay \rangle$
4. In Γ haben P_1 und P_2 nur endlich viele Möglichkeiten, sich zu entscheiden. In $\hat{\Gamma}$ haben beide eine unendliche Menge möglicher Entscheidungen.
5. Beachte, dass $\hat{S}_1$ eine konvexe, abgeschlossene und beschränkte Menge ist. Genauso $\hat{S}_2$. $\hat{H}(x,y)$ ist eine stetige Funktion auf $\hat{S}_1 \times \hat{S}_2$.
6. P_2 will seinen Verlust $\langle x, Ay \rangle$ minimieren und P_1 möchte seinen Gewinn $\langle x, Ay \rangle$ maximieren.
7. Im Weiteren werden wir den Wert $\langle x, Ay \rangle$ als realen Gewinn in einer Realisierung des Spieles $\hat{\Gamma}$ betrachten:
   $$\begin{cases} P_1 \text{ wählt ein } x \\ P_2 \text{ wählt ein } y \end{cases}$$
   P_1 erhält $\langle x, Ay \rangle$ von P_2. Wir vernachlässigen den Fakt, dass die Realisierung eines konkreten x und eines konkreten y schließlich doch zur Wahl einer Zeile und Wahl einer Spalte führt, weshalb P_2 an P_1 im Realisierungsfall von x und y den Gewinn $a_{i_0 j_0}$ zu zahlen hat.

- Angenommen, P_1 spielt x in $\hat{\Gamma}$. Im worst case bekommt er den Gewinn
  $$\min_y \{\langle x, Ay \rangle : y \in \hat{S}_2\}$$
- P_1 kann $x \in \hat{S}_1$ frei wählen, also wird er ein $\overline{x} \in \hat{S}_2$ wählen, welches
  $$\max_{x \in \hat{S}_1} \min_{y \in \hat{S}_2} \langle x, Ay \rangle = \min_{y \in \hat{S}_2} \langle \overline{x}, Ay \rangle = \underline{\hat{v}} = \text{unterer Spielwert}$$
  realisiert.

- Wenn P_2 ein $y \in \hat{S}_2$ wählt, dann ist sein Verlust im worst case

$$\max_{x \in \hat{S}_1} \langle x, Ay \rangle$$

- P_2 kann ein $y \in \hat{S}_2$ frei wählen, also wird er ein $\overline{y} \in \hat{S}_2$ wählen, welches

$$\min_{y \in \hat{S}_2} \max_{x \in \hat{S}_1} \langle x, Ay \rangle = \max_{x \in \hat{S}_1} \langle x, A\overline{y} \rangle = \hat{\overline{v}} = \text{oberer Spielwert}$$

realisiert.

Lemma 1.4 *In der gemischten Erweiterung $\hat{\Gamma}$ des Spieles Γ gilt $\hat{\underline{v}} \leq \hat{\overline{v}}$.*

Beweis 1.4
- Für alle $x \in \hat{S}_1, y \in \hat{S}_2$ gilt $\min_{z \in \hat{S}_2} \langle x, Az \rangle \leq \langle x, Ay \rangle \leq \max_{w \in \hat{S}_1} \langle w, Ay \rangle$
- $\Rightarrow \min_{z \in \hat{S}_2} \langle x, Az \rangle \leq \max_{w \in \hat{S}_1} \langle w, Ay \rangle \quad \forall x \in \hat{S}_1 \forall y \in \hat{S}_2$
- $\Rightarrow \max_{w \in \hat{S}_1} \min_{z \in \hat{S}_2} \langle x, Az \rangle \leq \min_{z \in \hat{S}_2} \max_{w \in \hat{S}_1} \langle w, Ay \rangle$
- $\Rightarrow \hat{\underline{v}} \leq \hat{\overline{v}}$

#

Bemerkung 1.5

$$\sup_{x \in \hat{S}_1} \inf_{y \in \hat{S}_2} \langle x, Ay \rangle = \max_{x \in \hat{S}_1} \min_{y \in \hat{S}_2} \langle x, Ay \rangle$$

Das heißt, Maximum und Minimum werden angenommen. Analog gilt (ohne Beweis):

$$\inf_{x \in \hat{S}_1} \sup_{y \in \hat{S}_2} \langle x, Ay \rangle = \min_{x \in \hat{S}_1} \max_{y \in \hat{S}_2} \langle x, Ay \rangle$$

Beweis 1.5

1. Weg
   - $\hat{S}_2$ ist eine kompakte Menge, d.h. abgeschlossen und beschränkt. $\langle x, Ay \rangle$ ist eine stetige Funktion von y für ein festes x.
     $\xRightarrow[\text{Weierstraß}]{} \inf_{y \in \hat{S}_2} \langle x, Ay \rangle$ wird an der Stelle $\overline{y}$ angenommen
   - $\Rightarrow$ wir können $\min_{y \in \hat{S}_2} \langle x, Ay \rangle$ schreiben.
   - $\langle x, Ay \rangle$ ist auf $\hat{S}_2$ gleichmäßig stetig, da $\hat{S}_2$ kompakt ist
   - damit lässt sich zeigen

$$\phi(x) = \min_{y \in \hat{S}_2} \langle x, Ay \rangle \text{ ist stetig auf } \hat{S}_2$$

   - $\xRightarrow[\text{Weierstraß}]{} \sup_{x \in \hat{S}_1} \phi(x)$ wird an einer Stelle $\overline{x} \in \hat{S}_1$ angenommen
   - $\Rightarrow$ wir können $\max_{\overline{x} \in \hat{S}_1} \phi(x)$ schreiben

2. Weg
   - $\langle x, Ay \rangle$ ist eine lineare Funktion von x für ein festes y
   - $\xRightarrow[\text{sind konkav}]{\text{lin. Fkt.}} \langle x, Ay \rangle$ ist eine konkave Funktion von x für ein festes y
   - $\xRightarrow[\text{Satz über die obere Einhüllende}]{} \phi(x) = \min \langle x, Ay \rangle$ ist eine konkave Funktion von x $\in \mathbb{R}^m$
   - $\xRightarrow[\text{konk. Fkt. sind stetig in inneren Punkten}]{} \phi(x)$ ist stetig in $\mathbb{R}^m$
   - $\xRightarrow[\text{Weierstraß, } \hat{S}_1 \text{ist kompakt}]{} \sup \phi(x)$ wird angenommen

- $\Rightarrow$ wir können $\max\limits_{x\in\hat{S}_1}\phi(x)$ schreiben

#

Def. 1.4 (Sattelpunkt)
Das Tupel $[x^*, y^*]$ heißt *Sattelpunkt* von $\hat{H}(x,y) := \langle x, Ay\rangle$ (ein Sattelpunkt in $\hat{\Gamma}$), wenn Folgendes gilt:

$$\langle x^*, Ay^*\rangle \geq \langle x, Ay^*\rangle \quad \forall x \in \hat{S}_1 \tag{+}$$
$$\langle x^*, Ay^*\rangle \leq \langle x^*, Ay\rangle \quad \forall y \in \hat{S}_2 \tag{++}$$

Lemma 1.5 *Betrachte das Spiel $\hat{\Gamma}$. Ein Sattelpunkt von $\hat{H}$ existiert genau dann, wenn $\underline{\hat{v}} = \hat{\bar{v}}$.*

Beweis 1.6

$\Rightarrow$
- $[x^*, y^*]$ ist ein Sattelpunkt von $\hat{H}$
  $\Rightarrow$ (+) und (++) gelten
  $\Rightarrow$
  $$(+) \Rightarrow \langle x^*, Ay^*\rangle \geq \max_{x\in\hat{S}_1}\langle x, Ay^*\rangle$$
  $$(++) \Rightarrow \langle x^*, Ay^*\rangle \leq \min_{y\in\hat{S}_2}\langle x^*, Ay\rangle$$
  $\Rightarrow$ $$\min_{y\in\hat{S}_2}\max_{x\in\hat{S}_1}\langle x, Ay\rangle \leq \max_{x\in\hat{S}_1}\langle x, Ay^*\rangle \leq \min_{y\in\hat{S}_2}\langle x^*, Ay\rangle \leq \max_{x\in\hat{S}_1}\min_{y\in\hat{S}_2}\langle x, Ay\rangle$$
- $\xRightarrow[\text{Def. von } \hat{\bar{v}} \text{ und } \underline{\hat{v}}]{} \hat{\bar{v}} \leq \underline{\hat{v}}$
- $\xRightarrow[\text{Lemma 1.4 } \hat{\bar{v}} \geq \underline{\hat{v}}]{} \hat{\bar{v}} = \underline{\hat{v}}$

$\Leftarrow$
- Sei nun $\hat{\bar{v}} = \underline{\hat{v}}$.
  $\Rightarrow$ $\min\limits_{y\in\hat{S}_2}\max\limits_{x\in\hat{S}_1}\langle x, Ay\rangle = \max\limits_{x\in\hat{S}_1}\min\limits_{y\in\hat{S}_2}\langle x, Ay\rangle$
  $\Rightarrow$ es gibt x^* und y^*, die die äußeren Extrema realisieren
  $\Rightarrow$ $\max\limits_{x\in\hat{S}_1}\langle x, Ay^*\rangle = \min\limits_{y\in\hat{S}_2}\langle x^*, Ay\rangle$
  $\Rightarrow$ $\langle x^*, Ay^*\rangle \leq \max\limits_{x\in\hat{S}_1}\langle x, Ay^*\rangle = \min\limits_{y\in\hat{S}_2}\langle x^*, Ay\rangle \leq \langle x^*, Ay^*\rangle$
  $\Rightarrow$ wir haben Gleichheit
  $\Rightarrow$
  $$\langle x^*, Ay^*\rangle = \max_{x\in\hat{S}_1}\langle x, Ay^*\rangle$$
  $$\langle x^*, Ay^*\rangle = \min_{y\in\hat{S}_2}\langle x^*, Ay\rangle$$
  $\Rightarrow$
  $$\langle x^*, Ay^*\rangle \geq \langle x, Ay^*\rangle, \quad \forall x$$
  $$\langle x^*, Ay^*\rangle \leq \langle x^*, Ay\rangle, \quad \forall y$$
- $\xRightarrow[Definition]{} [x^*, y^*]$ ist ein Sattelpunkt.

#

30.10.2002

Def. 1.5 (optimale Strategie)
Betrachte das Spiel $\hat{\Gamma}$. Wenn es in diesem Spiel einen Sattelpunkt von $\hat{H}(x,y)$ gibt, dann nennen wir x^* eine *optimale Strategie von P_1*
y^* eine *optimale Strategie von P_2*
$\hat{H}(x^*, y^*) = \langle x^*, Ay^*\rangle = v =$ den *Wert des Spieles*

Satz 1.6 (Rechteckeigenschaft) *Betrachte das Spiel $\hat{\Gamma}$. Wenn $[x^*, y^*] \in S_1 \times S_2$ und $[x^0, y^0] \in S_1 \times S_2$ beides Sattelpunkte von $\hat{H}(x,y)$ sind, dann gilt Folgendes:*

1. *$[x^*, y^0]$ und $[x^0, y^*]$ sind auch Sattelpunkte von $\hat{H}(x,y)$*
2. *$v = \hat{H}(x^*, y^*) = \hat{H}(x^0, y^0) = \hat{H}(x^0, y^*) = \hat{H}(x^*, y^0)$*

Beweis 1.7
analog zu 1.3 #

Bemerkung 1.6

1. Γ ist in $\hat{\Gamma}$ enthalten

   (a) Eine reine Strategie ist auch eine gemischte Strategie.
   - Betrachte die reine Strategie i_0 von P_1 in Γ.
   - Setzt man $x^0 = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] = [x_1, x_2, \dots, x_m]$, dann ist $x^0 \geq \mathbf{0}, \langle e, x^0 \rangle = 1$.

   $\Rightarrow$ $x^0 \in \hat{S}_1 \Rightarrow x^0$ ist eine gemischte Strategie.

   (b) Ein Sattelpunkt in Γ ist auch ein Sattelpunkt in $\hat{\Gamma}$.
   - Sei $[i_0, j_0]$ ein Sattelpunkt im Spiel Γ.

   $\Rightarrow$

$$a_{i_0 j_0} \geq a_{i j_0} \quad \forall i \qquad (+)$$
$$a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j} \quad \forall j \qquad (++)$$

   - Wir setzen

$$x^0 = [0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i_0}}{1}, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^m \text{ und } y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j_0 \quad \in \mathbb{R}^n$$

Beweis 1.8
Wir werden zeigen, dass $[x^0, y^0]$ ein Sattelpunkt von $\hat{H}(x,y)$ in $\hat{\Gamma}$ ist.

- $Ay^0 = \begin{pmatrix} a_{1j_0} \\ a_{2j_0} \\ \vdots \\ a_{mj_0} \end{pmatrix} \Longrightarrow \langle x^0, Ay^0 \rangle = a_{i_0 j_0}$
- $\langle e^i, Ay^0 \rangle = a_{ij0}$ mit $e^i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$
- Unsere Gleichung (+) heißt, dass $\langle x^0, Ay^0 \rangle \geq \langle e^i, Ay^0 \rangle \quad \forall i$
- Sei $x \in \hat{S}_1, x = \{x_1, \dots, x_m\}$
- $\underset{x_i \geq 0}{\Longrightarrow} \langle x^0, Ay^0 \rangle \cdot x_i \geq \langle e^i, Ay^0 \rangle \cdot x_i \quad \forall i$
- Aufsummieren über alle i liefert

$$\sum_{i=0}^{m} \langle x^0, Ay^0 \rangle \cdot x_i \geq \sum_{i=0}^{m} \langle e^i, Ay^0 \rangle \cdot x_i$$

- Aus $\sum_{i=0}^m x_i = 1$ folgt:

$$\langle x^0, Ay^0 \rangle \geq \sum_{i=0}^{m} \langle e^i, Ay^0 \rangle \cdot x_i = \left\langle \sum_{i=0}^{m} x_i e_i \, , \, Ay^0 \right\rangle = \langle x, Ay^0 \rangle$$

$\Rightarrow \left\langle x^0, Ay^0 \right\rangle \geq \left\langle x, Ay^0 \right\rangle \forall x \in \hat{S}_1$
- analog: $\left\langle x^0, Ay^0 \right\rangle \leq \left\langle x^0, Ay \right\rangle \forall y \in \hat{S}_2$

$\Rightarrow [x^0, y^0]$ ist ein Sattelpunkt im Spiel $\hat{\Gamma}$.

#

2. Einige Vorteile von Γ vor $\hat{\Gamma}$
   - Wenn wir das Spiel $\hat{\Gamma}$ in gemischten Strategien betrachten, stellen wir fest, dass P_2 den Wert $\langle x, Ay \rangle$ an P_1 zahlt, mit $x \in \hat{S}_1,\ y \in \hat{S}_2$.
   - Hierbei vernachlässigen wir, dass $\langle x, Ay \rangle$ nur der erwartete Gewinn ist.
   - Real wird $\hat{\Gamma}$ sehr oft gespielt. In einer konkreten Realisierung des Spieles werde nach $[x, y]$ gespielt. Dann hat:
     P_1 einen Zufallsmechanismus, der x realisiert
     P_2 einen Zufallsmechanismus, der y realisiert
   - In einer konkreten Realisierung von x und y geben die Mechanismen an,
     Eine Zeile i_0, die P_1 wählt
     Eine Spalte j_0, die P_2 wählt
   - In dieser konkreten Realisierung der Strategien x und y in $\hat{\Gamma}$ bezahlt P_2 an P_1 den Wert $a_{i_0 j_0}$. (Er bezahlt nicht $\langle x, Ay \rangle$).

   $\Rightarrow$ Dieser Wert $a_{i_0 j_0}$ kann auch kleiner sein als $\hat{\underline{v}}$.
   - Einige Spieltheoretiker halten am so genannten konservativen Konzept fest:
     - P_1 spielt die reine Strategie i_0, die $\underline{v} = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \min\limits_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = \min\limits_{1 \leq j \leq n} a_{i_0 j}$ realisiert und
     - P_2 spielt die reine Strategie j_0, die $\overline{v} = \min\limits_{1 \leq j \leq m} \max\limits_{1 \leq i \leq n} a_{ij} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} a_{i j_0}$ realisiert.
     - Wenn P_1 eine reine Strategie spielt, dann bekommt er mindestens den Wert von $\underline{v}$, der höher sein kann als a_{ij}, wenn in gemischten Strategien gespielt wird.

1.5 Lösbarkeit in gemischten Strategien

1928 bewies John von Neumann das zentrale Theorem über Matrixspiele. Es besagt, dass in jedem Fall $\hat{\underline{v}} = \hat{\overline{v}}$.

Lemma 1.7 *Für $z \in \mathbb{R}^1$ setzen wir*

$$\begin{cases} M(z) = \{x \in \mathbb{R}^m : \langle x, Ay \rangle \geq z, \forall y \in \hat{S}_1\} \\ N(z) = \{x \in \mathbb{R}^m : \left\langle x, Ae^j \right\rangle \geq z, \forall j = 1, 2, \ldots, n\} \end{cases}$$

Dann folgt $M(z) = N(z), \forall z \in \mathbb{R}^1$.

Beweis 1.9
Aus $N(z) \subset M(z)$ und $N(z) \supset M(z)$ folgt $N(z) = M(z)$.

$\subset$:
- Wenn $N(z) = \emptyset$ klar.
- Sei $x \in N(z)$. $\Rightarrow \left\langle x, Ae^j \right\rangle \geq z \quad \forall j = 1 \ldots n$
- Wähle $y \in \hat{S}_2, y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$
- $\xRightarrow[y_j \geq 0]{} \left\langle x, Ae^j \right\rangle y_j \geq z \cdot y_j \quad \forall j$
- $\xRightarrow[\text{Summieren}]{} \sum_{j=1}^m \left\langle x, Ae^j \right\rangle y_j \geq \sum_{j=1}^m z \cdot y_j$

$\Rightarrow \left\langle x, A(\sum_{j=1}^m e^j y_j) \right\rangle \geq z \cdot \sum_{j=1}^m y_j$
- $\xRightarrow[\substack{y \in \hat{S}_2, \\ \sum_j y_j = 1}]{} \langle x, Ay \rangle \geq z \xRightarrow[\text{y beliebig}]{} x \in M(z)$

$\supset$:
- Für $M(z) = \emptyset$ klar.
- Sei $x \in M(z) \Rightarrow \langle x, Ay \rangle \leq z \quad \forall y \in \hat{S}_2$
- $\xRightarrow[e^j \in \hat{S}_2]{} \left\langle x, Ae^j \right\rangle \leq z \quad \forall j$

$\Rightarrow\ x \in N(z)$

#

Satz 1.8 *Gegeben sei die gemischte Erweiterung $\hat{\Gamma}$ eines Spieles mit der Matrix A. Dann ist*

$$\underline{\hat{v}} = \max_{x \in \hat{S}_1} \min_{y \in \hat{S}_2} \langle x, Ay \rangle = \overline{\hat{v}} = \min_{y \in \hat{S}_2} \max_{x \in \hat{S}_1} \langle x, Ay \rangle$$

(Aus Lemma 1.5 folgt dann, dass in $\hat{\Gamma}$ ein Sattelpunkt immer existiert.)

Beweis 1.10

1. Wir müssen zeigen $\underline{\hat{v}} = \overline{\hat{v}}$. Wir zeigen das folgendermaßen: Wir zeigen, dass $\underline{\hat{v}}$ der optimale Wert eines Linearen Optimierungsproblems (P_1) ist und $\overline{\hat{v}}$ der optimale Wert des dazu dualen Problems (P_2) ist.

2. $\underline{\hat{v}} := \max_{x \in \hat{S}_1} \underbrace{\min_{y \in \hat{S}_2} \langle x, Ay \rangle}_{f(x)}$. Dann ist $\underline{\hat{v}}$ das Optimum f^* des folgenden Optimierungsproblems:

$$\begin{cases} f(x) \to \max \\ x \in \hat{S}_1 \end{cases} \tag{$\bullet$}$$

Betrachte für ein festes x die Ungleichung $\langle x, Ay \rangle \geq z \quad \forall y \in \hat{S}_2$. Man sieht, dass $\max z = \min_{y \in \hat{S}_2} \langle x, Ay \rangle$. Also folgt: $\underline{\hat{v}}$ ist das Optimum von folgendem Problem

$$\begin{cases} z \to \max \\ \langle x, Ay \rangle \geq z \quad \forall y \in \hat{S}_2 \\ x \in \hat{S}_1 \end{cases} \tag{o}$$

Wegen Lemma 1.7 ist

$$\left\{x : \langle x, Ay \rangle \geq z \quad \forall y \in \hat{S}_2\right\} = \left\{x : \left\langle x, Ae^j \right\rangle \geq z \quad \forall j = 1, \ldots, n\right\}$$

Das Problem (o) ist äquivalent zum Problem

$$\begin{cases} z \to \max \\ \left\langle x, Ae^j \right\rangle \geq z \quad \forall j = 1, \ldots, n \\ x \in \hat{S}_1 \end{cases} \tag{oo}$$

Wir wählen mit $A_j = Ae_j$ die j-te Spalte der Matrix A. Damit ist (oo) das Problem (unter Benutzung der expliziten Beschreibung von $\hat{S}_1$).

$$\begin{cases} z \to \max \\ \left\langle x, Ae^j \right\rangle \geq z \quad \forall j = 1, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{P_1}$$

Das ist ein lineares Optimierungsproblem.

04.11.2002

Wir halten fest: Ist $[x^*, z^*]$ eine optimale Lösung von (P_1), dann ist $z^* = \underline{\hat{v}}$ und x^* ist ein Element, welches das Maximum in $\max_x \min_y \langle x, Ay \rangle$ realisiert.

3. Ähnlich lässt sich zeigen, dass $\hat{\overline{v}} = \max_y \min_x \langle x, Ay \rangle$ zu folgendem Problem führt (a^i steht für die i-te Zeile der Matrix A):

$$\begin{cases} t \to \min\limits_{t,y} \\ \langle a^i, y \rangle \leq t, \quad \forall i = 1, \ldots, n \\ \sum_{j=1}^n y_j = 1 \\ y \geq \mathbf{0} \end{cases} \tag{P_2}$$

Beachte: wenn $[y^*, t^*]$ eine optimale Lösung von (P_2) ist, dann gilt $t^* = \hat{\overline{v}}$ und y^* realisiert das Minimum in $\min_y \max_x \langle x, Ay \rangle$.

4. Wir werden nun beweisen, dass (P_1) und (P_2) ein Paar von dualen linearen Optimierungsproblemen ist. Wenn das der Fall ist, dann wissen wir, dass der optimale Wert der Zielfunktion sich wie folgt ergibt:

$$t^* = z^* \xRightarrow[t^* = \hat{\overline{v}}, z^* = \hat{\underline{v}}]{} \hat{\underline{v}} = \hat{\overline{v}}$$

Nun zum Beweis der Dualität:

Beweis 1.11
Wir erinnern uns: Ist ein lin. Optimierungsproblem

$$\begin{cases} \langle c, w \rangle \to \min \\ Bw = b \\ w \geq \mathbf{0} \end{cases} \tag{K}$$

gegeben (K steht für *kanonisch*), dann ist

$$(D_K) \begin{cases} \langle \lambda, b \rangle \to \max \\ \lambda B + c \geq \mathbf{0} \end{cases} \tag{D_K}$$

das duale Problem zu (K).

Wir wollen nun (P_2) in ein Problem des Typs (K) umformen. In (P_2) kann t sowohl positiv als auch negativ sein, deswegen setzen wir $t = t' - t''$, wobei $t' \geq 0$ und $t'' \geq 0$.
Um die Ungleichung $\langle a^i, y \rangle - t \leq 0$ in eine Gleichung umzuformen, führen wir eine *Schlupf-Variable* (*slack variable*) y_{n+i} ein:

$$\begin{cases} \langle a^i, y \rangle - t + y_{n+i} = 0 \\ y_{n+i} \geq 0 \end{cases}$$

Diese Transformation angewendet auf (P_2) ergibt:

$$(\hat{P_2}) \begin{cases} t' - t'' \to \min \\ \langle a^i, y \rangle - (t' - t'') + y_{n+i} = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n \\ \sum_{j=1}^n y_j = 1 \\ y \geq \mathbf{0}, \ t' \geq 0, \ t'' \geq 0 \\ y_{n+i} \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{$\hat{P_2}$}$$

$(\hat{P}_2)$ lin. Optimierungsproblem in (K)-form. Wir notieren nun die Vektoren w, b, c und die Matrix B:

$$w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ \hline y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+m} \\ \hline t' \\ t'' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m+2}, \qquad b = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \vdots \\ \leftarrow m \\ \leftarrow m+1 \end{array} \quad \in \mathbb{R}^{m+1},$$

$$c = [\underbrace{\overset{y_1}{0}, \ \ldots \ \overset{y_n}{0},}_{n} \ \underbrace{\overset{y_{n+1}}{0}, \ \ldots \ \overset{y_{n+m}}{0},}_{m} \ \underbrace{\overset{t'}{1}, \ \overset{t''}{-1}}_{2}]$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ y_1 & y_2 & & y_n & y_{n+1} & y_{n+2} & & y_{n+m} & t' & t'' \end{array} \end{array}$$

Nutzt man diese Vektoren und die Matrix B, so sieht man $(\hat{P}_2) \widehat{=} (K)$. Wir wollen die Duale (D_K) zu (K) und damit zu $(\hat{P}_2)$ aufstellen.

$$(D_K) \begin{cases} \langle \lambda, b \rangle \to \max \\ \lambda B + C \geq \mathbf{0} \end{cases} .$$

Wir analysieren zuerst die Bestandteile von (D_K):

$$\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}] = [\tilde{\lambda}, \lambda_{m+1}]$$
$$\langle \lambda, b \rangle = \lambda_{m+1} \qquad (b \text{ von oben nutzen})$$

Wir bezeichnen mit B_j die j-te Spalte von B und mit
A_j die j-te Spalte von A.

$$\langle \lambda, B_j \rangle = \left\langle \tilde{\lambda}, Aj \right\rangle + 1 \cdot \lambda_{m+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$
$$\langle \lambda, B_{n+i} \rangle = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$
$$\langle \lambda, B_{n+m+1} \rangle = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$
$$\langle \lambda, B_{n+m+2} \rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

Nun sehen wir, dass (D_K) das folgende Problem darstellt:

$$(\hat{D}_K)\begin{cases}\langle\lambda,b\rangle=\lambda_{m+1}\to\max\\ \langle\lambda,B_j\rangle=\left\langle\tilde{\lambda},A_j\right\rangle+\lambda_{m+1}+0\geq 0,\quad j=1,2,\ldots,n\\ \left\langle\tilde{\lambda},B_{n+i}\right\rangle=\lambda_i+0\geq 0,\quad i=1,2,\ldots,m\\ \langle\lambda,B_{n+m+1}\rangle=-\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i+1\geq 0\quad(+1\text{ von }c_{n+m+1})\\ \langle\lambda,B_{n+m+2}\rangle=\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i-1\geq 0\quad(-1\text{ von }c_{n+m+2})\end{cases}\qquad(\hat{D}_K)$$

Schreiben wir jetzt noch x anstatt $\tilde{\lambda}$ und z anstatt λ_{m+1}, dann sehen wir: $(\hat{D}_K)$ entspricht Problem (P_1). Somit ist (P_1) dual zu (P_2). #

5. Da (P_1) und (P_2) dual zueinander sind, wissen wir aus der Dualitätstheorie (Vorlesung Optimierung I, Satz 4.6), dass Folgendes gilt: Wenn (P_1) eine optimale Lösung $[z^*,x^*]$ und (P_2) eine optimale Lösung $[t^*,y^*]$ besitzt, dann sind die Werte der Zielfunktion im optimalen Punkt gleich, d.h.
$$z^*=t^*\xRightarrow[Punkt 2,3]{}\underline{v}=\overline{v}.$$

6. Wir müssen noch zeigen, dass (P_1) und (P_2) optimale Lösungen besitzen.
   - Sei $\overline{x}=[1,0,\ldots,0]\Rightarrow\langle\overline{x},A_j\rangle=a_{1j}$.
   - Sei weiterhin $\overline{z}=\min\limits_{1\leq j\leq n}a_{1j}$
     $\Rightarrow[\overline{x},\overline{z}]$ ist eine zulässige Lösung von (P_1).
     $\Rightarrow$ Menge der zulässigen Lösungen von $(P_1)\neq\emptyset$. (+)
   - Sei nun außerdem
$$\overline{y}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\left\langle a^i,\overline{y}\right\rangle=a_{i1}$$
$$\overline{t}=\max_{1\leq i\leq m}a_{i1}\Rightarrow[\overline{y},\overline{z}]\text{ ist eine zulässige Lösung von }(P_2)$$
     $\Rightarrow$ Menge der zulässigen Lösungen von $(P_2)\neq\emptyset$. (++)

   Aus (+), (++) und Satz 4.6 aus der Vorlesung Optimierung I folgt, dass (P_1) und (P_2) optimale Lösungen besitzen.

Ende Beweis 1.10 #

Folgerung 1.9

1. *$[z^*,x^*]$ ist eine optimale Lösung des linearen Optimierungsproblems (P_1)*
$$\Rightarrow\begin{cases}x^*\textit{ ist eine optimale Strategie von }P_1\textit{ in }\hat{\Gamma}\\ z^*\textit{ ist der Wert des Spieles }\hat{\Gamma}\end{cases}$$

Beweis: $[z^*,x^*]$ ist optimal in (P_1). Nach Beweis 1.10 hat (P_2) ebenfalls eine optimale Lösung $[t^*,y^*]$.
(mit Beweis 1.10) $\Rightarrow x^*$ realisiert $\underline{v}$, y^* realisiert $\overline{v}$.
$\underline{v}=\overline{v}\xRightarrow[\text{Lemma 1.5}]{}[x^*,y^*]$ ist ein Sattelpunkt von $\hat{H}(x,y)=\langle x,Ay\rangle$.
$\xRightarrow[Def.opt.Strategie]{}x^*$ ist eine optimale Strategie von P_1.

2. *$[t^*, y^*]$ ist eine optimale Lösung des linearen Optimierungsproblems (P_2)*

$$\Rightarrow \begin{cases} y^* \text{ ist eine optimale Strategie von } P_2 \text{ in } \hat{\Gamma} \\ t^* \text{ ist der Wert des Spieles } \hat{\Gamma} \end{cases}$$

Beweis analog zu 1.

3. *Wenn $[z^*, x^*]$ und $[t^*, y^*]$ optimale Lösungen von (P_1) bzw. (P_2) sind, dann*

$$\begin{cases} z^* = t^* \\ \left(\left\langle e^i, Ay^* \right\rangle - t^*\right) \cdot x_i^* = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m \quad (\Box) \\ \left(\left\langle x^*, Ae^j \right\rangle - z^*\right) \cdot y_j^* = 0 \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n \quad (\Box\Box) \end{cases}$$

und umgedreht.
Beweis: $z^* = t^*$ nach Beweis 1.10. $(\Box)$ und $(\Box\Box)$ folgen aus den Komplementaritätsbedingungen in der linearen Optimierung (Satz 4.5 und Satz 4.5' in „Optimierung I").

06.11.2002

4. *Sind $[t^*, y^*]$ und $[z^*, x^*]$ zulässige Lösungen von (P_1) bzw. (P_2) und $t^* = z^*$ gilt, dann*

$$\begin{cases} [x^*, y^*] \text{ ist ein Sattelpunkt von } \hat{H} \text{ in } \hat{\Gamma} \\ t^* = z^* \text{ ist der Wert des Spieles } \hat{\Gamma} \end{cases}$$

und umgedreht.
Beweis:

$$\left.\begin{array}{l} [z^*, x^*] \text{ ist zulässig in } (P_1) \\ [t^*, y^*] \text{ ist zulässig in } (P_2) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ weil (P_1) und (P_2) duale Probleme sind, folgt aus $t^* = z^*$

$$\left.\begin{array}{l} [z^*, x^*] \text{ ist optimal in } (P_1) \\ [t^*, y^*] \text{ ist optimal in } (P_2) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \underline{\hat{v}} = \hat{\overline{v}}$ und

$$\left.\begin{array}{l} x^* \text{ realisiert das } \max\min \langle x, Ay \rangle \\ y^* \text{ realisiert das } \min\max \langle x, Ay \rangle \end{array}\right\}$$

$\xRightarrow[\text{Lemma 1.5}]{}$

$$\left.\begin{array}{l} [x^*, y^*] \text{ ist Sattelpunkt von } \langle x, Ay \rangle = H(x) \\ \langle x^*, Ay^* \rangle \text{ ist der Wert des Spieles } \hat{\Gamma} \end{array}\right\}$$

Man überprüft, dass $\langle x^*, Ay^* \rangle = t^* = z^*$. #

5. *Die Menge X^* aller optimaler Strategien von P_1 in $\hat{\Gamma}$ ist nicht leer und konvex. Analoges gilt für die Menge Y^* aller optimaler Strategien von P_2 in $\hat{\Gamma}$.*
Beweis (nur für X^*):
   - Satz 1.8 besagt, dass P_1 eine optimale Strategie hat $\Rightarrow X^* \neq \emptyset$
   - Punkt 1 von Folgerung 1.9 bedeutet

$$\begin{aligned} X^* &= \{x : [x, v] \text{ ist eine optimale Lösung von } (P_1)\} \\ &= \{x \in \hat{S}_1 : \langle x, Aj \rangle \geq v, \quad j = 1, 2, \ldots, n\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ X^* ist die Lösungsmenge einer linearen Gleichung und $n + m$ linearer Ungleichungen
   - $\xRightarrow[\text{Theorie konvexer Mengen}]{}$ X^* ist konvex

Beispiel 1.3

1. Stein-Schere-Papier:
   - $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
   - $\hat{\underline{v}} = -1 \neq \hat{\overline{v}} = 1$

   $\Rightarrow$ nicht in reinen Strategien lösbar
   - Satz 1.8 besagt, dass das Spiel mit A in gemischten Strategien lösbar ist
   - Aus Symmetriegründen vermuten wir $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ und $y^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ sind optimale Strategien von P_1 bzw. P_2

   Beweis 1.12
   - Wir werden Punkt 4 vom Folgerung 1.9 benutzen. Setze $t^* = z^* = 0$.
   - Folgendes lineares Optimierungsproblem (P_1) ist mit der Matrix A verbunden, $x = [x_1, x_2, x_3], \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$.

   $$(P_1) \quad \begin{cases} z \to \max \\ -x_2 + x_3 \geq z \\ x_1 - x_3 \geq z \\ -x_1 + x_2 \geq z \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \qquad (P_2) \quad \begin{cases} t \to \min \\ y_2 - y_3 \leq t \\ -y_1 + y_3 \leq t \\ y_1 + y_2 \leq t \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

   - Es ist leicht zu sehen, dass $[z^*, x^*] = [0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ eine zulässige Lösung von (P_1) ist und $\begin{bmatrix} t^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ eine zulässige Lösung von (P_2) ist.
   - Wegen $0 = t^* = z^* = 0$ folgt aus Punkt 4 von Folgerung 1.9:

   $$\begin{aligned} &x^* \text{ ist eine optimale Strategie von } P_1 \text{ in } \hat{\Gamma} \\ &y^* \text{ ist eine optimale Strategie von } P_2 \text{ in } \hat{\Gamma} \end{aligned}$$

   #

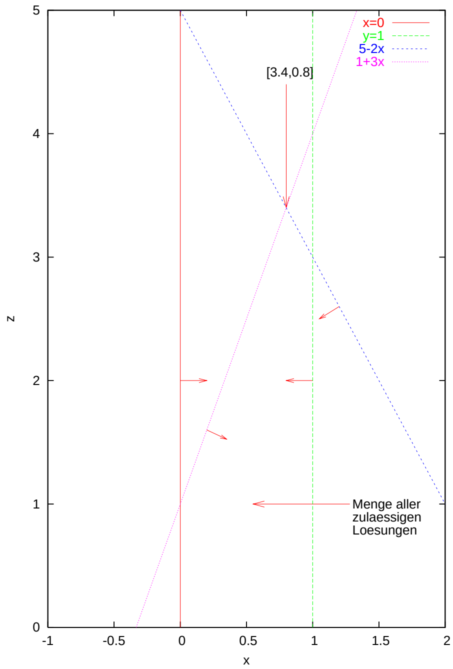
   Bemerkung 1.7
   Wie kann P_1 diese optimale Strategie $x^* = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ spielen?
   $\Rightarrow$ Würfeln mit einem Würfel.

   $$Augenzahl = \begin{cases} 1 \text{ oder } 2 & \Rightarrow \text{Spieler wählt die erste Zeile} \\ 3 \text{ oder } 4 & \Rightarrow \text{Spieler wählt die zweite Zeile} \\ 5 \text{ oder } 6 & \Rightarrow \text{Spieler wählt die dritte Zeile} \end{cases}$$

2. In Kapitel 1.4 haben wird das Spiel mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ betrachtet.
   - $\underline{v} = 3$, $\overline{v} = 4 \Rightarrow$ Spiel hat keine Lösung in reinen Strategien
   - Betrachte das Spiel mit der Matrix A in gemischten Strategien.

- Spieler P_1 muss (P_1) lösen: $x = [x_1, x_2]$

$$(P_1)\begin{cases} z \to \max \\ 5x_1 + 3x_2 \geq z \\ x_1 + 4x_2 \geq z \\ x_1 + x_2 + \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \xRightarrow[x_1:=1-x_2]{} \begin{cases} z \to \max \\ 5(1-x_2) + 3x_2 \geq z \\ 1 - x_2 + 4x_2 \geq z \\ 1 - x_2 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (\hat{P}_1) \begin{cases} z \to \max \\ 5 - 2x_2 \geq z \\ 1 + 3x_2 \geq z \\ 0 \leq x_2 \leq 1 \end{cases}$$



- Der maximale Wert von z in der Lösungsmenge ist $z^* = \frac{17}{5}$, der optimale Wert von x_2 ist $x_2^* = \frac{4}{5} \xRightarrow[x_1=1-x_2]{} x_1^* = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow$ $\hat{v} = \frac{17}{5}$ ist der Wert des Spieles und $x^* = [\frac{1}{5}, \frac{4}{5}]$ ist die optimale Strategie von P_1 im Spiel mit der Matrix A.

- Aus Folgerung 1.9 folgt, es gilt für jede optimale Lösung von (P_2): $t^* = z^* = \frac{17}{5}$
- Da $x_1^* > 0$ besagt Formel ($\square$) von Folgerung 1.9 $(\langle e^1, Ay^* \rangle - t^*) = 0)$

$$\Rightarrow \langle [5 \quad 1], y^* \rangle - \frac{17}{5} = 0$$

$$\Rightarrow 5y_1^* + y_2^* = \frac{17}{5} \tag{+}$$

- Da $x_2^* > 0$ besagt Formel ($\square$) von Folgerung 1.9 $(\langle e^2, Ay^* \rangle - t^*) = 0)$

$$\Rightarrow \langle [3 \quad 4], y^* \rangle - \frac{17}{5} = 0$$

$$\Rightarrow 3y_1^* + 4y_2^* = \frac{17}{5} \tag{++}$$

- $\xRightarrow[(+)(++)]{} 5y_2^* + y_2^* = 3y_1^* + 4y_2^* \Rightarrow y_1^* = \frac{3}{2}y_2^*$
- In (+) Einsetzen ergibt $5(\frac{3}{2}y_2^*) + y_2^* = \frac{17}{5} \Rightarrow y_2^* = \frac{2}{5} \Rightarrow y_1^* = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow$ $y^* = [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$ ist eine optimale Strategie von P_2 im Spiel mit der Matrix A.

- Wie können x^* und y^* realisiert werden? $\Rightarrow$ mit einem Glücksrad mit z.B. 10 Nägeln.

$$Nagel = \begin{cases} 1 \text{ oder } 2 & \Rightarrow \text{Spieler wählt die erste Zeile} \\ 3, 4, \ldots, 10 & \Rightarrow \text{Spieler wählt die zweite Zeile} \end{cases}$$

Bemerkung 1.8

1. Es gibt drei wesentliche Fragen in der Spieltheorie:
   - Was versteht man unter einem optimalen Verhalten?
   - Existiert ein solches optimales Verhalten?
   - Wie kann man es berechnen?

   Bei Matrixspielen sind die Antworten offensichtlich:
   - Optimales Verhalten ist verbunden mit einem Sattelpunkt von $\langle x, Ay\rangle$ (Verwendung gemischter Strategien)
   - Solch ein Sattelpunkt existiert immer. (Satz 1.8)
   - Löse die linearen Optimierungsprobleme (P_1) und (P_2).
2. Aus ($\square$) in Folgerung 1.9 folgt:
   - Wenn für eine optimale Strategie y^* von P_2 gilt $\langle a_i, y^*\rangle - t^* \neq 0$, dann ist $x_i^* = 0$ in jeder optimalen Strategie x^* von P_1

   $\Rightarrow$ in jeder optimalen Strategie x^* von P_1 wird die i-te Zeile mit Wahrscheinlichkeit 0 ausgewählt.
   - (Analog für P_2 aus ($\square\square$))

11.11.2002

1.6 Optimale Strategien und ihre Eigenschaften

Def. 1.6 (Spektrum-Strategie)
Wir sagen, dass eine reine Strategie i_0 zum Spektrum von P_1 gehört, wenn es mindestens eine optimale Strategie x^* von P_1 im Spiel $\hat\Gamma$ gibt, in der $x^*_{i_0} > 0$ (das heißt, in x^* wird die reine Strategie i_0 mit einer positiven Wahrscheinlichkeit gewählt).

Lemma 1.10 *Wenn i_0 zum Spektrum von P_1 gehört, dann ergibt sich für jede optimale Strategie y^* von P_2:*

$$\left\langle e^{i_0}, Ay^*\right\rangle = \hat v$$

($\hat v$ — Wert des Spieles $\hat\Gamma$). Das bedeutet, falls P_1 eine Spektrum-Strategie gegen eine optimale Strategie des Gegners spielt, dann wird sein Gewinn gleich dem Wert des Spieles sein (als Erwartungswert).

Beweis 1.13
Wenn i_0 zum Spektrum von P_1 gehört, dann (nach Def. *Spektrum-Strategie*):

$$\exists \text{ eine optimale Strategie } x^* \text{ von } P_1 \text{ mit } x^*_{i_0} > 0$$

$$\Rightarrow \left(\left\langle e^{i_0}, Ay^*\right\rangle - \hat v\right) x^*_{i_0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mit } (\square) \text{ aus} \\ \text{Folgerung} \\ 1.9}}{=} 0$$

$$\xRightarrow[\substack{x^*_{i_0} > 0 \\ \Rightarrow x^*_{i_0} \neq 0}]{} \left\langle e^{i_0}, Ay^*\right\rangle - \hat v = 0$$

#

Bemerkung 1.9

1. Das Lemma behauptet *nicht*, dass i_0 eine optimale Strategie von P_1 sein muss. Soll i_0 eine optimale Strategie sein, so muss gelten:

$$\left\langle e^{i_0}, Ay\right\rangle \geq \hat v \quad \forall y \in \hat S_2$$

2. Eine ähnliche Bedingung gilt für P_2: Wenn j_0 zum Spektrum von P_2 gehört, so muss gelten:

$$\left\langle x^*, Ae^{j_0}\right\rangle = \hat{v} \quad \forall \text{optimalen Strategien } x^* \text{ von } P_1$$

Def. 1.7 (Strategisch äquivalente Matrixspiele)
Sei eine Matrix $A = \{a_{ij}\}_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ gegeben. Wir sagen, dass das Spiel $\hat{\Gamma}$ mit Matrix $\tilde{A} = \{\tilde{a}_{ij}\}_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ *strategisch äquivalent* zum Spiel Γ mit Matrix A ist, wenn Konstanten $k > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ existieren, sodass für alle (i, j): $\tilde{a}_{ij} = ka_{ij} + \alpha$.

Bemerkung 1.10

- k ist eine Art Wechselkurs (z.B. von \$ nach €).
- α stellt eine feste Zahlung von P_2 an P_1 dar, bevor das Spiel startet.

Lemma 1.11 *Wir betrachten die zwei Matrixspiele Γ und $\tilde{\Gamma}$ (Γ mit Matrix A und $\tilde{\Gamma}$ mit Matrix $\tilde{A}$). Γ und $\tilde{\Gamma}$ seien strategisch äquivalent. Dann gilt:*

x^* und y^* sind optimale Strategien von P_1 bzw. P_2 im Spiel Γ und v ist der Wert von Γ.

$$\Longleftrightarrow$$

x^* und y^* sind optimale Strategien von P_1 bzw. P_2 im Spiel $\tilde{\Gamma}$ und $\tilde{v} = kv + \alpha$ ist der Wert von $\tilde{\Gamma}$.

Beweis 1.14

1. Nach Lemma 1.5 ist $[x^*, y^*]$ genau dann ein Paar optimaler Strategien von P_1 bzw. P_2 mit v als Wert des Spieles, wenn:

$$\begin{cases} \langle x^*, Ay^*\rangle = v & (\circ) \\ v \leq \langle x^*, Ay\rangle, \forall y \in \hat{S}_2 & (\circ\circ) \\ v \geq \langle x, Ay^*\rangle, \forall x \in \hat{S}_1 & (\circ\circ\circ) \end{cases}$$

2. Sei $x \in \hat{S}_1$, $y \in \hat{S}_2$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \left\langle x, \tilde{A}y\right\rangle &= \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} y_j \underset{\substack{\uparrow \\ \tilde{a}_{ij} = ka_{ij} + \alpha}}{=} \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} (ka_{ij} + \alpha) y_j\right) \\ &= k \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + \alpha \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j \\ &= k\langle x, Ay\rangle + \alpha \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j \underset{\substack{\uparrow \\ y \in \hat{S}_2 \\ \Rightarrow \sum_j y_j = 1}}{=} k\langle x, Ay\rangle + \alpha \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot 1 \underset{\substack{\uparrow \\ x \in \hat{S}_1 \\ \Rightarrow \sum_i x_i = 1}}{=} k\langle x, Ay\rangle + \alpha \cdot 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\langle x, \tilde{A}y\right\rangle = k\langle x, Ay\rangle + \alpha \quad \forall x \in \hat{S}_1, \forall y \in \hat{S}_2 \qquad (\triangle)$$

3. Sei wieder $[x^*, y^*]$ ein Paar optimaler Strategien von P_1 bzw. P_2 im Spiel Γ mit Matrix A.

$$
\begin{aligned}
(\triangle) &\xRightarrow[\substack{x^* \in \hat{S}_1 \\ y^* \in \hat{S}_2}]{} \left\langle x^*, \tilde{A}y^* \right\rangle = k \langle x^*, Ay^* \rangle + \alpha \\
&\xRightarrow[\text{mit } (\circ)]{} \left\langle x^*, \tilde{A}y^* \right\rangle = kv + \alpha \\
(\circ\circ) &\xRightarrow[k > 0]{} kv \le k \langle x^*, Ay \rangle \quad \forall y \in \hat{S}_2 \\
&\Rightarrow kv + \alpha \le k \langle x^*, Ay \rangle + \alpha \quad \forall y \in \hat{S}_2 \\
&\xRightarrow[(\triangle)]{} kv + \alpha \le \left\langle x^*, \tilde{A}y \right\rangle \quad \forall y \in \hat{S}_2 \\
(\circ\circ\circ) &\xRightarrow[\text{analog}]{} kv + \alpha \ge \left\langle x, \tilde{A}y^* \right\rangle \quad \forall x \in \hat{S}_1 \\
&\Rightarrow [x^*, y^*] \text{ ist ein Sattelpunkt von } \tilde{\Gamma} \\
&\quad\;\; \text{und } (kv + \alpha) \text{ ist der Wert des Spieles } \tilde{\Gamma}.
\end{aligned}
$$

4. Die Umkehrrichtung kann auf dieselbe Weise gezeigt werden.

#

Bemerkung 1.11
Als Konsequenz aus Lemma 1.11 können wir nun stets o.B.d.A. davon ausgehen, dass der Wert eines Matrixspieles gleich Null ist. Sei v der Wert des Spieles mit A. Man betrachte dazu anstatt des Spieles mit Matrix $A = \{a_{ij}\}$ das Spiel mit Matrix $\tilde{A} = \{\tilde{a}_{ij}\}$, wobei $\tilde{a}_{ij} = 1 \cdot a_{ij} + (-v)$. Der Wert des Spieles mit Matrix $\tilde{A}$ ist dann $1 \cdot v + (-v) = 0$.

Lemma 1.12 *Sei i_0 eine reine Strategie von P_1 im Spiel Γ mit Matrix A. Dann gilt genau eine der beiden folgenden Alternativen:*

(i) i_0 gehört zum Spektrum von P_1.

(ii) Spieler P_2 besitzt mindestens eine optimale Strategie y^* mit $\left\langle e^{i_0}, Ay^* \right\rangle < \hat{v}$, wobei $\hat{v}$ hier der Wert des Spieles $\hat{\Gamma}$ ist.

Bemerkung 1.12
Nehmen wir an, das Lemma gilt.

- Wenn (i) zutrifft $\xRightarrow[\text{Lemma 1.10}]{} \left\langle e^{i_0}, Ay^* \right\rangle = \hat{v} \quad \forall y^*$, die optimal für P_2 sind
- Wenn (ii) zutrifft $\xRightarrow[\langle e^{i_0}, Ay^* \rangle < \hat{v}]{}$ Wenn P_1 seine reine Strategie i_0 gegen die optimale Strategie y^* von P_2 spielt, dann erhält er weniger als $\hat{v}$. i_0 kann somit keine Spektrum-Strategie sein. Spielt P_1 die Nicht-Spektrum-Strategie i_0 gegen eine optimale Strategie von P_2, so kann er sich nicht sicher sein, dass sein Gewinn gleich dem Wert $\hat{v}$ des Spieles sein wird.

Beweis 1.15

1. Die Strategie i_0 gehöre nicht zum Spektrum von P_1. Aufgrund des Lemmas 1.11 können wir annehmen, der Wert $\hat{v}$ des Spieles mit der Matrix A sei gleich null. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $i_0 = m =$ Index der letzten Zeile in A.

   Wir betrachten nun das folgende System:

$$
(+) \begin{cases} -a^m = -\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k e^k + \sum\limits_{i=1}^{m-1} \lambda_i a^i \\ \mu_k \ge 0 \quad \forall k = 1, \dots, n \\ \lambda_i \ge 0 \quad \forall i = 1, \dots, m-1 \end{cases}
$$

   Dabei ist

- e^k der k-te Einheitsvektor von $\mathbb{R}^n$ und
- a^i der i-te Zeilenvektor von A.

Offensichtlich kann nur eine der beiden folgenden Aussagen gelten:

($\circ$) Das System (+) hat eine Lösung, d.h. es existieren λ und μ, die (+) erfüllen.

($\circ\circ$) Das System (+) hat keine Lösung.

2. Wir zeigen, dass ($\circ$) nicht eintreten kann, weil daraus folgen würde, dass i_0 zum Spektrum von P_1 gehören müsste:
   - Sei dazu $\{\overline{\mu}_k, \overline{\lambda}_i\}_{k=1}^{n}{}_{i=1}^{m-1}$ eine Lösung von (+).
   - Wir definieren $x^* = [x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*]$ wie folgt:

$$x^* : \begin{cases} x_i^* = \dfrac{\overline{\lambda}_i}{1+\sum\limits_{i=1}^{m-1}\overline{\lambda}_i} & i = 1,2,\ldots,m-1 \\ x_m^* = \dfrac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{m-1}\overline{\lambda}_i} & \end{cases} \tag{$\square$}$$

   - Man prüft leicht nach, dass $x^* \in \hat{S}_1 = \{x : x \geq \mathbf{0},\ \langle e, x\rangle = 1\}$
   - Wir betrachten nun $\left\langle x^*, Ae^j \right\rangle = \left\langle x^* A, e^j \right\rangle$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. } x^* \text{ in } (\square) \\ a^i \text{ ist die } i\text{-te Zeile von } A}}{=} \frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{m-1}\overline{\lambda}_i} \left\langle \sum_{i=1}^{m-1} \overline{\lambda}_i a^i + 1\cdot a^m, e^j \right\rangle$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ (+)}}{=} \frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{m-1}\overline{\lambda}_i} \left\langle \sum_{k=1}^{n} \overline{\mu}_k e^k, e^j \right\rangle$$

$$= \frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{m-1}\overline{\lambda}_i} \sum_{k=1}^{n} \overline{\mu}_k \left\langle e^k, e^j \right\rangle$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \langle e^k, e^j\rangle = 0, \quad \text{wenn } k \neq j \\ \langle e^k, e^j\rangle = 1, \quad \text{wenn } k = j}}{=} \overline{\mu}_j \frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{m-1}\overline{\lambda}_i}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach } (+)}}{\geq} 0 = \hat{v}$$

   $\Rightarrow \left\langle x^*, Ae^j \right\rangle \geq \hat{v}, \quad \forall j = 1,\ldots,n$

   Nach Lemma 1.7 erhalten wir $\langle x^*, Ay\rangle \geq \hat{v}, \quad \forall y \in \hat{S}_2$.

   $\Rightarrow x^*$ ist eine optimale Strategie von P_1.
   - Da

$$x_{i_0}^* \underset{\substack{\uparrow \\ i_0 = m}}{=} x_m^* \underset{\substack{\uparrow \\ (\square)}}{>} 0$$

   folgt nach Def. 1.6 (Spektrum-Strategie), dass i_0 zum Spektrum von P_1 gehört.
   - Widerspruch zur Annahme. $\Rightarrow$ Nur ($\circ\circ$) kann eintreten.

13.11.2002

3. Wir wissen, dass nur ($\circ\circ$) eintreten kann.

- Wir wissen jetzt, dass (+) nicht lösbar ist
$\xRightarrow[Farka's Lemma]{}$ das korrespondierende System (++) ist lösbar.

$$(++) \begin{cases} \langle a^i, y\rangle \geq 0 & i = 1,2,\ldots,m-1 \\ \langle -e^k, y\rangle \geq 0 & k = 1,2,\ldots,n \\ \langle -a^m, y\rangle < 0 \end{cases}$$

- Sei $\bar{y}$ eine Lösung von (++). Es gilt

$$\bar{y} \neq 0, \bar{y} \leq 0 \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_i = \langle e, \bar{y}\rangle < 0$$

Setze

$$y^* = \frac{\bar{y}}{\langle e, \bar{y}\rangle}$$

- Aus (++) folgt

$$\begin{cases} \langle a^i, y^*\rangle = \langle e^i, Ay^*\rangle \underset{\langle e,\bar{y}\rangle < 0}{\underset{\uparrow}{\leq}} 0 & i = 1,2,\ldots,m-1 \\ y^* \geq 0 \\ \langle a^m, y^*\rangle < 0 \end{cases}$$

- Aus der Annahme $\hat{v} = 0$ folgt

$$(\square) \begin{cases} \langle e^i, Ay^*\rangle \leq \hat{v} \quad i = 1,2,\ldots,m-1 \\ \left.\begin{array}{l} y^* \geq 0 \\ \langle e, y^*\rangle = 1 \end{array}\right\} \quad y^* \in \hat{S_2} \\ \langle a^m, y^*\rangle = \langle e^m, Ay^*\rangle < 0 \end{cases}$$

Aus Zeile 1 und 4 folgt mittels der Definition für optimale Strategien, dass y^* eine optimale Strategie von P_2 ist.
- Aus der letzten Zeile von ($\square$) erhalten wir

$$\langle e^{i_0}, Ay^*\rangle \underset{i_0 = m}{\underset{\uparrow}{=}} \langle e^m, Ay^*\rangle < \hat{v}$$

- $\Rightarrow$ (ii) gilt.

#

Def. 1.8 (Starke Dominanz)
Seien $\hat{x}$ und $\bar{x}$ gemischte Strategien von P_1 im Spiel $\hat{\Gamma}$. Wir sagen, dass $\hat{x}$ *stark dominiert* über $\bar{x}$, wenn

$$\hat{H}(\hat{x}, e^j) = \langle \hat{x}, Ae^j\rangle > \langle \bar{x}, Ae^j\rangle = \hat{H}(\bar{x}, e^j) \quad \forall j = 1,2,\ldots,n$$

Seien $\hat{y}$ und $\bar{y}$ gemischte Strategien von P_2 im Spiel $\hat{\Gamma}$. Wir sagen, dass $\hat{y}$ *stark dominiert* über $\bar{y}$, wenn

$$\langle e^i, A\hat{y}\rangle < \langle e^i, A\bar{y}\rangle \quad \forall i = 1,2,\ldots,m$$

Bemerkung 1.13

- $\hat{x}$ dominiert $\bar{x}$ stark $\Leftrightarrow \langle \hat{x}, Ay\rangle > \langle \bar{x}, Ay\rangle \quad \forall y \in \hat{S_2}$
- Analoges gilt für die starke Dominanz von Strategien von P_2.

Def. 1.9 (Dominanz)
Sei $\hat{x}$ eine gemischte Strategie von P_1 und i_o eine reine Strategie von P_1 im Spiel $\hat{\Gamma}$. Wir sagen, dass $\hat{x}$ die reine Strategie i_0 *dominiert*, wenn Folgendes gilt:

$$\begin{cases} \hat{x}_{i_0} = 0 \\ \left\langle \hat{x}, Ae^j \right\rangle \geq \left\langle e^{i_0}, Ae^j \right\rangle \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Sei $\hat{y}$ eine gemischte Strategie von P_2 und j_o eine reine Strategie von P_2 im Spiel $\hat{\Gamma}$. Wir sagen, dass $\hat{y}$ die reine Strategie j_0 **dominiert**, wenn Folgendes gilt:

$$\begin{cases} \hat{y}_{j_0} = 0 \\ \left\langle e^i, A\hat{y} \right\rangle \leq \left\langle e^i, Ae^{j_0} \right\rangle \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

Bemerkung 1.14
$\hat{x}$ dominiert $e^{i_0} \Leftrightarrow \langle \hat{x}, Ay \rangle \geq \left\langle e^{i_0}, Ay \right\rangle \quad \forall y \in \hat{S}_2$

Bemerkung 1.15
Ist es möglich, Dominanz in einer gegebenen Matrix zu finden? Antwort: Im Allgemeinen nicht, aber wenn es sich um (starke) Dominanz zwischen reinen Strategien handelt, dann schon. Betrachte z.B. die starke Dominanz zwischen $\hat{x} = e^{i_0}$ und $\bar{x} = e^{i_1}$, $i_0 \neq i_1$. Das heißt

$$\left\langle e^{i_0}, Ae^j \right\rangle > \left\langle e^{i_1}, Ae^j \right\rangle \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n \Longleftrightarrow a_{i_0 j} > a_{i_1 j} \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

Lemma 1.13

(i) *Wenn eine reine Strategie stark dominiert wird, dann kann diese nicht zum Spektrum des Spielers gehören ($\Rightarrow$ in jeder optimalen Strategie des Spielers wird sie mit Wahrscheinlichkeit Null gespielt).*

(ii) *Sei die reine Strategie i_0 von P_1 dominiert im Spiel $\hat{\Gamma}$ mit der Matrix A. Sei A' die Matrix, die aus A durch Streichen der i_0-ten Zeile entsteht. Dann gilt Folgendes:*

  (a) *Der Wert des Spieles mit der Matrix A ist derselbe wie der Wert des Spiels mit der Matrix A'.*

  (b) *Jede optimale Strategie y^* von P_2 im Spiel mit A' ist auch eine optimale Strategie von P_2 im Spiel mit A.*

  (c) *Jede optimale Strategie x'^* von P_1 im Spiel mit A' erzeugt eine optimale Strategie x^* von P_1 im Spiel mit A (genauer: Setze $x^*_{i_0} = 0$ in x^*, alle anderen Komponenten von x^* sind diesselben wie in x'^*.*

Bemerkung 1.16
Analoge Ergebnisse sind für P_2 im Fall (ii) wahr.

Beweis 1.16
(nur für P_1)

1. • Sei $\hat{x}$ stark dominierend über e^{i_0}.

$$\Rightarrow \left\langle \hat{x}, Ae^j \right\rangle > \left\langle e^{i_0}, Ae^j \right\rangle \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n \qquad (\circ)$$

   • Sei y^* eine optimale Strategie von P_2.

$$\xRightarrow[y^*_j \geq 0]{} \begin{cases} \left\langle \hat{x}, Ae^j \right\rangle y^*_j \geq \left\langle e^{i_0}, Ae^j \right\rangle y^*_j \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n \\ \text{wobei mindestens eine der Ungleichungen eine strenge} \\ \text{Ungleichung ist, da } \sum_{j=1}^n y^*_j = 1 \end{cases}$$

- Aufsummieren ergibt
$$\langle \hat{x}, Ay^* \rangle > \langle e^{i_0}, Ay^* \rangle \tag{$\circ\circ$}$$
- Angenommen, i_0 gehöre zum Spektrum von P_1 (im Widerspruch zu Behauptung (i)).
- Aus Lemma 1.10 folgt
$$\langle e^{i_0}, Ay^* \rangle = \hat{v} \text{ (= der Wert des Spieles).} \tag{$\triangle$}$$
- Aus der Definition einer optimalen Strategie von P_2 haben wir
$$\begin{aligned} \langle x, Ay^* \rangle &\leq \hat{v} \quad \forall x \in S_1 \\ \Rightarrow \langle \hat{x}, Ay^* \rangle &\leq \hat{v} \end{aligned}$$
- $(\triangle)$,$(\circ\circ)$ $\Rightarrow \langle \hat{x}, Ay^* \rangle > \hat{v}$ ↯

$\Rightarrow$ e^{i_0} gehört nicht zum Spektrum von P_1.

2. - Sei e^{i_0} dominiert von $\hat{x} \in \hat{S}_1$. O.B.d.A. sei $i_0 = 1$. Aus der Definition von Dominanz erhalten wir
$$\begin{cases} \hat{x}_1 = 0 \\ \langle \hat{x}, Ae^j \rangle \geq \langle e^{i_0}, Ae^j \rangle \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{$\circ$}$$
- Bezeichnungen
$$\begin{cases} \hat{S}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : x = [x_1, x_2, \ldots, x_m], x \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\} \\ \hat{S}_1' = \{z \in \mathbb{R}^{m-1} : z = [z_2, z_3, \ldots, z_m], z \geq 0, \sum_{i=2}^{n} z_i = 1\} \\ A' = \{a_{ij}\}_{i=2}^{m}{}_{j=1}^{n}, \quad A = \{a_{ij}\}_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n} \end{cases}$$
- Sei nun $[x'^*, y^*]$ ein Paar optimaler Strategien von P_1 bzw. P_2 im Spiel mit A' ($x'^* \in \hat{S}_1{}', y^* \in \hat{S}_2$)
- Aus Folgerung 1.9 folgt
$$[x'^*, z^*] \text{ mit } z^* = \langle x'^*, A'y^* \rangle = \text{ der Wert des Spieles mit} A'$$
ist eine optimale Lösung des linearen Optimierungsproblems (P_1'), das mit der Matrix A' verbunden ist.
$$[y^*, t^*] \text{ mit } t^* = z^*$$
ist eine optimale Lösung des linearen Optimierungsproblems (P_2'), das mit der Matrix A' verbunden ist.
- Wir setzen nun
$$x^* = [x_1^*, x'^*] = [x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*], \text{ wobei } x_1^* = 0$$
- Wir werden zeigen, dass $[x^*, z^*]$ eine optimale Lösung von (P_1) verbunden mit der Matrix A, ist und dass $[y^*, t^*]$ eine optimale Lösung von (P_2) verbunden mit A, ist. Wenn das bewiesen ist, dann sind (iia) bis (iic) von Lemma 1.13 unter Benutzung von Folgerung 1.9 ebenfalls bewiesen. Wie kann man das zeigen?
- Wir können dies unter Verwendung von (4) von Folgerung 1.9 zeigen.
- Es ist leicht zu verifizieren, dass $[x^*, z^*]$ zulässig in (P_1) (Problem mit Matrix A) ist, da x'^* optimal ist und damit zulässig in (P_1') (Problem mit Matrix A') und weil $x_1^* = 0$
- Das Gleiche gilt für (P_2) und (P_2'), allerdings haben wir in (P_2) (Problem mit Matrix A) eine Ungleichung mehr (a^1) als in (P_2') (Problem mit Matrix A').

- Trotzdem ist
$$\left\langle a^1, y^* \right\rangle - t^* \le 0$$
da
$$t^* \ge \left\langle a^i, y^* \right\rangle \quad \forall i = 2, 3, \ldots, m$$
weil $[y^*, t^*]$ optimal in (P_2') ist.

18.11.2002

- Multiplikation der $m-1$ Ungleichungen mit $\hat{x}_i$ und Aufsummieren ergibt
$$t^* \ge \langle \hat{x}', A' y^* \rangle \underset{\hat{x}_1 = 0}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \langle \hat{x}, A y^* \rangle$$
- Aus der Dominanz folgt allerdings
$$\left\langle \hat{x}, Ae^j \right\rangle \ge \left\langle e^1, Ae^j \right\rangle \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n$$
- Multiplikation der j-ten Ungleichung mit y_j^* und Aufsummieren ergibt
$$\langle \hat{x}, Ay^* \rangle \ge \left\langle e^1, Ay^* \right\rangle \underset{e_1 A = a^1}{\underset{\uparrow}{=}} \left\langle a^1, y^* \right\rangle$$

$\Rightarrow$ $t^* \ge \left\langle a^1, y^* \right\rangle$
$\Rightarrow$ $[t^*, y^*]$ ist zulässig in dem Linearen Optimierungsproblem (P_2) für das Spiel mit der Matrix A.

#

Folgerung 1.14 *Lemma 1.13 zeigt Möglichkeiten, die Matrix A eines Spieles zu reduzieren.*

Beweis 1.17

1. - Die i_0-te Zeile ist stark dominiert
   - $\xRightarrow[\text{Lemma 1.13}]{}$ i_0 gehört nicht zum Spektrum von P_1
   - $\xRightarrow[\text{Def. Spektrum}]{}$ In jeder optimalen Strategie x^* von P_1 ist $x_{i_0} = 0$.
   - Wenn wir die optimale Strategien von P_1 und P_2 berechnen wollen, können wir die i_0-te Zeile in der Matrix A auslassen.

   $\Rightarrow$ Wir können die Matrix A reduzieren.
2. - Wenn die Dominanz nur einfach ist (nicht stark), könenn wir nicht sagen, dass $x_o^* = 0$ in jeder optimalen Strategie von P_1.
   - Aber wir wissen aus Lemma 1.13: Wenn wir die i_0-te Zeile der Matrix A löschen und das Spiel mit der verbleibenden Matrix A' lösen, erhalten wir eine optimale Strategie P_1 im Spiel mit der Matrix A, indem wir $x_{i_0}^* = 0$ anstelle der fehlenden Komponente setzen.

   $\Rightarrow$ Auch hier wurde wieder die Matrix reduziert.

#

Def. 1.10 (symmetrisches Spiel)
Wenn die Matrix A schiefsymmetrisch ist (d.h. $-A^\tau = A$), dann nennen wir das Spiel mit der Matrix A ein *symmetrisches Spiel.*

Lemma 1.15 *Die Matrix A sei schiefsymmetrisch. Dann gilt.*

(i) $\hat{v} = 0$ *ist der Wert des Spieles* $\hat{\Gamma}$ *mit* A.

(ii) x^* *is eine optimale Strategie von* P_1 *im Spiel* $\hat{\Gamma} \Longleftrightarrow y^* := x^*$ *ist eine optimale Strategie von* P_2 *im Spiel* $\hat{\Gamma}$.

Beweis 1.18

1.
   - Sei $[x^*, y^*]$ ein Paar optimaler Strategien von P_1 bzw. P_2 im Spiel $\hat{\Gamma}$.
   - $\xRightarrow[\text{Def. opt. Strategie}]{} [x^*, y^*]$ ist ein Sattelpunkt von $\hat{H}(x, y) = \langle x, Ay\rangle$
   - $\xRightarrow[\text{Def. SP}]{} \langle x, Ay^*\rangle \leq \langle x^*, Ay^*\rangle = \hat{v} \leq \langle x^*, Ay\rangle \quad \forall x \in \hat{S}_1, \forall y \in \hat{S}_2$
2.
   - Multiplikation mit (-1) liefert
   $$\langle x, -Ay^*\rangle \geq \langle x^*, -Ay^*\rangle = -\hat{v} \geq \langle x^*, -Ay\rangle \quad \forall x \in \hat{S}_1, \forall y \in \hat{S}_2$$
   - Wenn x und y beides Spaltenvektoren sind, dann kann dies geschrieben werden als
   $$x^\tau(-A)y^* \geq (x^*)^\tau(-A)y^* = -\hat{v} =\geq (x^*)^\tau(-A)y \quad \forall x \in \hat{S}_1, \forall y \in \hat{S}_2$$
   - Unter Benutzung der Transpositionsregel $((A \cdot B \cdot C)^\tau = C^\tau B^\tau A^\tau)$ erhalten wir
   $$(y^*)^\tau(-A^\tau)x \geq (y^*)^\tau(-A^\tau)x^* = -\hat{v} \geq y^\tau(-A^\tau)x^* \quad \forall x \in \hat{S}_1, \forall y \in \hat{S}_2$$
   - Aus $A = -A^\tau$ folgt
   $$(y^*)^\tau Ax \geq (y^*)^\tau Ax^* = -\hat{v} \geq y^\tau Ax^* \quad \forall x \in \hat{S}_1, \forall y \in \hat{S}_2$$
   - $\xRightarrow[\text{Def. SP}]{} [y^*, x^*]$ ist ein Sattelpunkt im Spiel $\hat{\Gamma}$ mit der Matrix A .
   - $\xRightarrow[\text{Theorem 1.6}]{}$ aus $[x^*, y^*]$ und $[y^*, x^*]$ sind beides Sattelpunkte folgt $[x^*, x^*]$ und $[y^*, y^*]$ sind auch Sattelpunkte und
   $$(y^*)^\tau Ax^* = (x^*)^\tau Ay^*$$

   $\Rightarrow$ x^* ist eine optimale Strategie von P_2
   $\Rightarrow$ $-\hat{v} = \hat{v} \Rightarrow \hat{v} = 0$

#

Bemerkung 1.17
Wenn der Spielwert eines Spieles gleich Null ist, dann nennen wir das Spiel ein *faires Spiel (harmloses Spiel).* $\xRightarrow[Lemma 1.15]{}$ symmetrische Spiele sind faire Spiele.

1.7 Anwendungen von Matrixspielen

1.7.1 Verstecken und Suchen

1. Spielbeschreibung
   - Es gibt n Objekte, das i-te Objekt hat den Wert $g_i > 0$. Es gibt n Orte (z.B. Schachteln).
   - P_2 wählt ein Objekt, z.B. das i-te Objekt und versteckt es am Ort i.
   - P_1 darf einen der Orte untersuchen. Wenn er den i-ten Ort untersucht und es ist ein Objekt mit Wert g_i dort, dann erhält er den Wert g_i, ansonsten bekommt er nichts.
   - Die Spieler kennen ihre Entscheidungen gegenseitig nicht.
   - Objekt i kann nur am Ort i versteckt werden.
2. Matrix
   - Sei i die Strategie von P_1 und j die Strategie von P_2. a_{ij} bezeichne den Gewinn von P_1.
   $$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & g_n \end{pmatrix}$$
   - A ist eine Diagonalmatrix. A ist symmetrisch, aber nicht schiefsymmtrisch.

3.
- Bezeichne $\hat{v}$ den Wert des Spieles $\hat{\Gamma}$ mit der Matrix A. Wir werden zeigen, dass $\hat{v} > 0$.
- Bezeichne mit x^* eine optimale Strategie von P_1 (x^* existiert nach Satz 1.8). Aus der Definition einer optimalen Strategie folgt
$$\langle x^*, Ae^j \rangle \geq \hat{v} \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n \tag{$\circ$}$$
- Bezeichne mit y^* eine optimale Strategie von P_2. Aus der Definition einer optimalen Strategie folgt
$$\langle x, Ay^* \rangle \leq \hat{v} \quad \forall x \in \hat{S}_1 \tag{$\circ\circ$}$$
- Sei $\tilde{x} = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}] \in \hat{S}_1$.

$\Rightarrow$ $\langle \tilde{x}, Ay^* \rangle \leq \hat{v}$
- Da A Diagonalmatrix ist, folgt
$$\left\langle \tilde{x}, \begin{pmatrix} g_1 y_1^* \\ g_2 y_2^* \\ \vdots \\ g_n y_n^* \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} g_i y_i^* \geq \frac{1}{n} (\min_{1 \leq i \leq n} g_i) \sum_{i=1}^{n} y_i^* \underset{\substack{\uparrow \\ y^* \in \hat{S}_2}}{=} \frac{1}{n} \min_{1 \leq i \leq n} g_i > 0$$
- Aus $\langle \tilde{x}, Ay^* \rangle \leq \hat{v}$ erhalten wir
$$\hat{v} \geq \frac{1}{n} \min_i g_i > 0 \Longrightarrow \hat{v} > 0$$

4.
- Wir zeigen, dass $x_i^* > 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$.
- Gegenannahme: Sei $x_{i_0} = 0$.
- Aus ($\circ$) erhalten wir mit $j = i_0$ $\langle x^*, Ae^{i_0} \rangle \geq \hat{v}$
$$Ae^{i_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_{i_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle x^*, Ae^{i_0} \rangle = x_{i_0}^* g_{i_0} \underset{\substack{\uparrow \\ x_{i_0}^* = 0}}{=} 0$$

$\Rightarrow$ $0 \geq \hat{v} \quad \lightning \quad \hat{v} > 0$

$\Rightarrow$ $x_{i_0} > 0$

5.
- Aus Folgerung 1.9 erhalten wir (aus ($\Box$), wobei $t^* = \hat{v}$)
$$(\langle e^i, Ay^* \rangle - \hat{v}) x_i^* = 0 \quad \forall i$$
- $\xRightarrow[x_i^* > 0 \quad \forall i]{} \langle e^i, Ay^* \rangle - \hat{v} = 0$
$$\Rightarrow \hat{v} = \langle e^i, Ay^* \rangle = \left\langle e^i, \begin{pmatrix} g_1 y_1^* \\ g_2 y_2^* \\ \vdots \\ g_n y_n^* \end{pmatrix} \right\rangle = g_i y_i^*$$
$$\Rightarrow \hat{v} = g_i y_i^*$$
$$\xRightarrow[g_i > 0]{} y_i^* = \frac{\hat{v}}{g_i} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$
$$\xRightarrow[\sum y_i^* = 1]{} 1 = \hat{v} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{g_i}$$
$$\Rightarrow \hat{v} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{g_i}}$$

- $y^* = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{g_i}}[\frac{1}{g_1}, \frac{1}{g_2}, \ldots, \frac{1}{g_n}]$ ist eine optimale Strategie von P_2.

6. • Aus (□□) in Folgerung 1.9 wissen wir, dass

$$(\langle x^*, Ae^j \rangle - \hat{v})y_j^* = 0 \quad \forall j$$

- $\xRightarrow[y_j^* > 0 \quad \forall j]{} \langle x^*, Ae^j \rangle = \hat{v}$
- (Vorgehenesweise wie oben) $\Longrightarrow x^* = y^* = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{g_i}}[\frac{1}{g_1}, \frac{1}{g_2}, \ldots, \frac{1}{g_n}]$

Bemerkung 1.18
Die Matrix A ist symmetrisch (aber nicht schiefsymmetrisch) und $x^* = y^*$, allerdings ist der Wert des Spieles ungleich Null.

25.11.2002

1.7.2 Diskretes Duell mit verbundenen Augen und Schalldämpfer

- Zwei Duellanten, jeder hat eine geladene Pistole mit einem Schuss.
- Von einem Schiedsrichter kontrolliert, schreiten sie geradlinig in diskreten Schritten aufeinander zu.
- Nach jedem Schritt haben sie die Möglichkeit zum Feuern.
- Die Genauigkeit (=Wahrscheinlichkeit) zum Treffen des Gegners nach dem k-ten Schritt liege bei $\frac{k}{n}$ ($2n$ = anfänglicher Abstand in Schritten zwischen P_1 und P_2).
- Trifft P_1 seinen Gegner P_2, so ist sein Gewinn $+1$.
- Trifft dagegen P_2, so erhält P_1 stattdessen -1.
- Wir wollen den erwarteten Gewinn von P_1, wenn er nach i Schritten und P_2 nach j Schritten schießt, mit a_{ij} bezeichnen. Wir setzen $a_{ii} := 0, \quad \forall i$.
- Ist $i < j$, d.h. schießt P_1 vor P_2, so ergibt sich:

$$a_{ij} = (+1) \cdot \left(\frac{i}{n}\right) + (-1)\left(1 - \frac{i}{n}\right) \cdot \frac{j}{n} \tag{$*$}$$

- Ist $i > j$, so setzen wir $a_{ij} = -a_{ji}$.
- Wir betrachten den Fall $n = 5$. Aus $(*)$ erhalten wir:

$$A = \{a_{ij}\}_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -7 & -11 & -15 \\ 3 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 7 & -1 & 0 & 7 & 5 \\ 11 & 2 & -7 & 0 & 15 \\ 15 & 5 & -5 & -15 & 0 \end{pmatrix}$$

- A ist schiefsymmetrisch, also $-A^\tau = A$.

$$\xRightarrow[\text{Lemma 1.15}]{} \begin{cases} \hat{v} = 0 = \text{Wert des Spiels} \\ x^* = y^* \end{cases}$$

1. • Wir sehen, dass die zweite Zeile die erste stark dominiert (jeder einzelne Eintrag in der zweiten Zeile ist größer als der entprechende in der ersten).

$$(a_{2j} > a_{1j}, \forall j) \xRightarrow[\text{Lemma 1.13}]{} x_1^* = 0 \text{ in jeder optimalen Strategie } x^* \text{ von } P_1$$

- Aus $x^* = y^*$ erhalten wir $y_1^* = 0$ in jeder optimalen Strategie y^* von P_2.
- Wir dürfen daher die erste Zeile und Spalte von A weglassen.

$$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & -7 & 0 & 15 \\ 5 & -5 & -15 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Wir müssen nun eine optimale Strategie von P_1 im Spiel mit A' finden. Aus Satz 1.8 folgt, dass wir das folgende lineare Optimierungsproblem zu lösen haben:

$$(P_1)\begin{cases} z \to \max\limits_{z,x} \\ \left\langle x, A'e^j \right\rangle \geq z & \forall j = 1,2,3,4 \\ \langle x, e\rangle = 1 & x \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Da wir aus Lemma 1.15 wissen, dass für jede optimale Lösung $[x^*, z^*]$ von (P_1) der Wert des Spiels, also z^*, gleich 0 wird, reduziert sich (P_1) zu folgender Aufgabe: Finde eine zulässige Lösung des folgenden Systems:

$$(P_2)\begin{cases} \left\langle x, A'e^j \right\rangle \geq 0 & \forall j = 1,2,3,4 \\ \langle x, e\rangle = 1 \\ x \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

3.
   - Wir zeigen nun, dass
   $$\left\langle x, A'e^j \right\rangle = 0 \quad \forall j = 1,2,3,4 \tag{$\square$}$$
   im Widerspruch steht zu
   $$\langle x, e\rangle = 1$$
   - Es gilt: $\left\langle x, A'e^j \right\rangle = \left\langle x, A'_j \right\rangle$, wobei A'_j die j-te Spalte von A' bezeichnet.
   - Somit ist $(\square)$ äquivalent zu $xA' = \mathbf{0}$.
   - Wir haben $\det(A') = 100$, also $\neq 0$.
     $\Rightarrow xA' = \mathbf{0}$ hat die eindeutige Lösung $x = \mathbf{0}$.
   - $\lightning$ zu $\langle x, e\rangle = 1$
     $\Rightarrow$ mindestens eine der Ungleichungen $\left\langle x, A'e^j \right\rangle \geq 0$ in (P_2) muss eine echte Ungleichung sein.

4. Aus $(\square\square)$ in Folgerung 1.9 wissen wir:

$$\left(\left\langle x^*, A'_j \right\rangle - 0\right) x_j^* = 0 \quad \forall j, \text{ weil: } z^* = \hat{v} = 0 \text{ und } x^* = y^*$$

Da wir wissen, dass mindestens einer der Ausdrücke $\left\langle x^*, A'_j \right\rangle$ größer Null ist, muss mindestens eines der x_j^* gleich Null sein. Wir werden versuchen, eine Lösung x^* zu finden, wobei wir annehmen, dass die dritte Zeile von A' mit Wahrscheinlichkeit 0 gespielt wird (d.h. $x_3^* = 0$) und alle anderen Ungleichungen $\left\langle x^*, A'_j \right\rangle \geq 0$, $j = 1,2,4$ zu Gleichungen werden.

5.
   - Wir betrachten dazu das System
   $$\begin{cases} \left\langle x, A'e^j \right\rangle = 0 & \forall j = 1,2,4 \\ \langle x, e\rangle = 1 \\ x \geq \mathbf{0} & (\text{mit } x_3^* = 0, \text{ also } x = [x_1, x_2, 0, x_4]) \end{cases}$$
   - Wir erhalten:
   $$\begin{aligned} -x_2 + 5x_4 &= 0 \quad |xA'_1 \\ x_1 - 5x_4 &= 0 \quad |xA'_2 \\ -5x_1 + 5x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$
   Es folgt:
   $$\begin{aligned} x_2 &= 5x_4 \\ x_1 &= 5x_4 \\ 5x_4 + 5x_4 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_4 = \frac{1}{11}, \quad x_1 = \frac{5}{11}, \quad x_2 = \frac{5}{11}$$

$\Rightarrow$ $x = \left[\frac{5}{11}, \frac{5}{11}, 0, \frac{1}{11}\right]$ ist eine Lösung von (P_2) mit Matrix A'.

- Damit ist $x^* = \left[0, \frac{5}{11}, \frac{5}{11}, 0, \frac{1}{11}\right]$ eine optimale Strategie von P_1 im Spiel mit Matrix A (A' hatten wir durch Weglassen der ersten Zeile und Spalte aus A erhalten).
- Das optimale Verhalten x^* stellt sich also wie folgt dar:
  Nach dem ersten und vierten Schritt niemals schießen.
  .... zweiten Schritt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{11}$ schießen.
  .... dritten .... $\frac{5}{11}$ ....
  .... fünften .... $\frac{1}{11}$ ....

1.7.3 Ein Garantieproblem

Firma F stellt ein elektronisches Gerät her, dessen Lebensdauer von einem Transistor abhängt. Ginge das Gerät innerhalb des ersten Jahres kaputt, so würde F es auf eigene Kosten reparieren müssen (Garantiefall). Wir nehmen an, eine Reparatur koste 36€ (nur der Transistor gehe kaputt). F hat 3 Möglichkeiten:

(I) F kann einen Transistor des Typs I einbauen, der 4€ kostet und für den dessen Hersteller L keine Garantie gibt.

(II) F kann einen Transistor des Typs II einbauen, der 24€ kostet und für den L im Falle einer Reparatur deren gesamte Kosten übernimmt (Garantie).

(III) F kann einen Transistor des Typs III einbauen, der 40€ kostet und für den L neben den Reparaturkosten außerdem 40€ für den erlittenen Image-Verlust an F überweist.

Der Endkunde weiß nicht, welcher Transistor benutzt wird, weil der Preis für das Gerät nicht vom eingebauten Transistor abhängt.

2.12.2002

Wir nehmen an, dass es keine anderen Defekte außer dem Transistor geben kann. Außerdem soll es keine Abhängigkeiten zwischen Transistortyp und Reparaturfall geben. D.h. wir nehmen an, dass ein Transistor zufällig kaputt geht. Wir werden die Situation mit einem Matrixspiel modellieren. Es gibt zwei Spieler:

- Firma F, die entscheidet, welcher Transistor benutzt wird
- Natur, die entscheidet, welcher Transistor kaputt geht

Es ergeben sich folgende Gewinne für P_1

		Spieler 2	
		nicht defekt	defekt
Spieler 1	Typ I	-4	$-4-36$
	Typ II	-24	-24
	Typ III	-40	$-40+40$

Wir addieren 40 zu jedem Element dieser Matrix und bekommen ein strategisch äquivalentes Spiel.

$$A = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 16 & 16 \\ 0 & 40 \end{pmatrix}$$

Wir werden versuchen, dieses Spiel mit der Matrix A zu lösen.

1. Ist das Spiel in reinen Strategien lösbar?

$$\min_j a_{ij} = (0, 16, 0) \qquad \max_i \min_j a_{ij} = 16 = \underline{v} = \text{unterer Spielwert}$$

$$\max_i a_{ij} = \begin{pmatrix} 36 \\ 40 \end{pmatrix} \qquad \min_i \max_j a_{ij} = 36 = \overline{v} = \text{oberer Spielwert}$$

Wegen $\underline{v} \neq \overline{v}$ ist das Spiel in reinen Strategien nicht lösbar, d.h. wir müssen gemischte Strategien verwenden.

2. Wie sieht es mit Dominanz in A aus?

$$\begin{cases} \text{Wird die 1. Zeile von einer Kombination der anderen beiden Zeilen stark dominiert?} \\ \text{Wird die 2. Zeile von einer Kombination der anderen beiden Zeilen stark dominiert?} \\ \text{Wird die 3. Zeile von einer Kombination der anderen beiden Zeilen stark dominiert?} \end{cases}$$

   (a) Dominanz über die erste Zeile
   Angenommen, die erste Zeile würde stark dominiert. Dann müsste folgendes Sysem lösbar sein.

$$\begin{cases} 36 < 16x_2 + 0x_3 \\ \left.\begin{array}{l} 0 < 16x_2 + 40x_3 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right\} x_3 < -\frac{5}{4} \quad \lightning \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

   (b) Dominanz über die dritte Zeile
   $\Rightarrow$ keine Dominanz.

   (c) Dominanz über die zweite Zeile.
   Angenommen, die zweite Zeile würde stark dominiert. Dann müsste folgendes System lösbar sein.

$$\begin{cases} 16 < 36x_1 + 0x_3 \\ 16 < 0x_1 + 40x_3 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_1, x_3 \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

   Das System ist lösbar, z.B. ist $x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{2}$ eine Lösung. Das heißt, dass die zweite Zeile stark dominiert ist. Mit Lemma 1.13 folgt, dass $x_2^* = 0$ in jeder optimalen Strategie $x^* = [x_1^*, x_2^*, x_3^*]$ von P_1.
   Wir können also statt dem Spiel mit der Matrix A das Spiel mit der Matrix A' betrachten.

$$A' = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 40 \end{pmatrix}$$

3. Lösung des Spieles mit A' mit Hilfe der Linearen Optimierung. Wir müssen das lineare Optimierungsproblem (P_1) lösen.

$$\begin{cases} z \to \max \\ \langle x, A'e^j \rangle \geq z \quad \forall j = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^m x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n \end{cases} \tag{P_1}$$

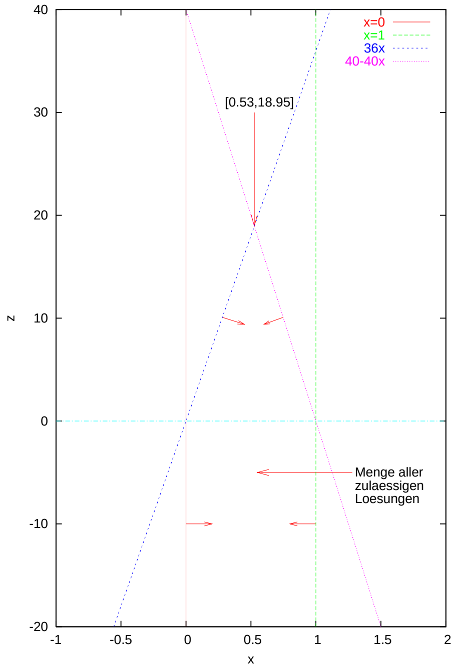
   In unserem Fall haben wir das folgende Problem zu lösen:

$$\begin{cases} z \to \max \\ 36x_1 + 0x_3 \geq z \\ 0x_1 + 40x_3 \geq z \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_1, x_3 \geq 0 \end{cases} \tag{$\circ$}$$

Unter Benutzung von $x_3 = 1 - x_1$ ergibt sich:

$$\begin{cases} z \to \max \\ 36x_1 \geq z \\ 40 - 40x_1 \geq z \\ 0 \leq x_1 \leq 1 \end{cases} \tag{$\circ\circ$}$$

Wir veranschaulichen das graphisch.



- Es ergibt sich: $[\frac{10}{19}, \frac{360}{19}]$ ist die optimale Lösung von $(\circ\circ)$.

$\Rightarrow$ $[x_1^*, 1 - x_1^*, z^*]$ ist die optimale Lösung von $(\circ)$.

$\Rightarrow$ $x^* = [x_1^*, 0, 1 - x_1^*] = [\frac{10}{19}, 0, \frac{8}{19}]$ ist die optimale Strategie von P_1.

- $z^* = \frac{360}{19} - 40$ ist der Wert des Spieles mit Matrix A.

4. Wie realisiert man $x^* = [\frac{10}{19}, 0, \frac{9}{19}]$?
   Die kann man z.B. mit Hilfe von Zufallszahlen realisieren. Möglich wäre auch, sich die Zahl Π anzuschauen und jeweils zwei Ziffern zusammen als eine Zahl interpretieren, die modulo 19 geteilt wird.

$$\text{Zahl mod } 19 = \begin{cases} 0 \text{ bis } 9 & \Rightarrow \text{Spieler 1 wählt die erste Zeile} \\ 10 \text{ bis } 18 & \Rightarrow \text{Spieler 1 wählt die zweite Zeile} \end{cases}$$

5. Wir haben die Situation mit einem Matrixspiel modelliert. Spieler 1 war dabei die Natur, die versucht, ihre „Verluste“ im Spiel zu minimieren. Das ist natürlich nicht realistisch, da die Natur blind agiert und keine Strategie in dem Sinne spielt. Die Modellierung steht also in starkem Kontrast zur Annahme, dass Defekte zufällig auftreten. Die Natur hat kein „Interesse“ an einem Gewinn oder Verlust von $P1$.
   Einige Spieletheoretiker würde das Spiel mit reinen Strategien lösen und damit Zeile 2 wählen.

4.12.2002

2 Spiele auf dem Einheitsquadrat

Spiele auf dem Einheitsquadrat sind 2-Spieler Nullsummenspiele mit stetigen Strategien.

2.1 Nichtkooperative Spiele in Normalform

2.1.1 Nichtkooperative n-Personen-Spiele

Def. 2.1 (nichtkooperatives n-Personen-Spiel)
Es seien gegeben: n Personen $P_1, P_2, \ldots, P_n$,
n Mengen $S_1, S_2, \ldots, S_n$ und
n Funktionen $H_1, H_2, \ldots, H_n$ mit $H_i : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \mapsto \mathbb{R}$
Das Tupel $\Gamma = \langle P_1, P_2, \ldots, P_n, S_1, S_2, \ldots, S_n, H_1, H_2, \ldots, H_n \rangle$ nennt man ein *nichtkooperatives n-Personen-Spiel*, wenn

1. P_i wählt ein Element σ_i aus S_i, $\forall i \in \{1 \ldots n\}$.
2. P_i bekommt den Gewinn $H_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $\forall i \in \{1 \ldots n\}$ ausgezahlt.

Bemerkung 2.1

1.
   - Wir wollen annehmen, dass die Personen ihre Entscheidungen σ_i $(i = 1 \ldots n)$ unabhängig voneinander treffen.
   - Außerdem sollen alle Personen gut informiert sein, d.h. sie kennen nicht nur ihr eigenes S_i und H_i, sondern außerdem auch die S_j, H_j aller anderen Spieler.
   - Schließlich setzen wir voraus, dass jede Person P_i daran interessiert ist, ihre Funktion H_i zu maximieren.
2. Bis jetzt haben wir keine Annahmen über die Natur der Mengen S_i (mit $i = 1 \ldots n$) gemacht.
3. Wir werden folgende Notation benutzen:

P_i	der Spieler i
S_i	Strategiemenge von P_i
$\sigma_i \in S_i$	eine *zulässige* Strategie von P_i
H_i	Gewinnfunktion des Spielers i
σ	eine Situation im Spiel, wobei $\sigma \overset{\text{def}}{=} [\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n] \in \prod_{i=1}^{n} S_i$

Def. 2.2 (akzeptable Situation)
Es sei ein Spiel $\Gamma = \langle P_1, P_2, \ldots, P_n, S_1, S_2, \ldots, S_n, H_1, H_2, \ldots, H_n \rangle$ gegeben und eine Situation $\overline{\sigma} = [\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_n]$ in diesem Spiel. Wir nennen eine Situation $\overline{\sigma}$ *akzeptabel* für den Spieler P_i, wenn gilt:

$$H_i(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_{i-1}, \overline{\sigma}_i, \overline{\sigma}_{i+1}, \ldots, \overline{\sigma}_n) \geq H_i(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_{i-1}, \sigma_i, \overline{\sigma}_{i+1}, \ldots, \overline{\sigma}_n) \quad \forall \sigma_i \in S_i$$

Def. 2.3 (Lösung von Γ im Sinne von John Nash)
Eine Situation $\overline{\sigma} = [\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_n]$ im Spiel Γ heißt *Gleichgewichtssituation* (*equilibrium*), wenn $\overline{\sigma}$ für alle Spieler akzeptabel ist.

Bemerkung 2.2

- „$\overline{\sigma}$ ist akzeptabel für P_i“ bedeutet: Wenn P_i als einziger von der $\overline{\sigma}$-Strategie abweicht, alle anderen aber dabei bleiben, dann wird er daraus keinen Vorteil ziehen können.
- Was bedeutet es, wenn $\overline{\sigma}$ keine Gleichgewichtssituation ist? Es muss dann mindestens ein Spieler P_{i_0} existieren, für den $\overline{\sigma}$ nicht akzeptabel ist. Das bedeutet, es gibt wenigstens eine Strategie $\hat{\sigma}_{i_0}$, für die gilt:

$$H_{i_0}(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_{i_0-1}, \overline{\sigma}_{i_0}, \overline{\sigma}_{i_0+1}, \ldots, \overline{\sigma}_n) < H_{i_0}(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_{i_0-1}, \hat{\sigma}_{i_0}, \overline{\sigma}_{i_0+1}, \ldots, \overline{\sigma}_n)$$

- Ein Matrixspiel (in reinen oder gemischten Strategien) ist ein nichtkooperatives 2-Personen-Spiel in Normalform. Als Lösung eines solchen Matrixspiels hatten wir Sattelpunkte $[x^*, y^*]$ der Funktion $H(x, y) = \langle x, Ay\rangle$ angesehen.

  Nach Definition ist $[x^*, y^*] \in S_1 \times S_2$ (S_1, S_2 — Strategiemengen der gemischten Strategien) ein Sattelpunkt von H, wenn:

$$\begin{aligned} H(x, y^*) &\le H(x^*, y^*), && \forall x \in S_1 \\ H(x^*, y^*) &\le H(x^*, y), && \forall y \in S_2 \\ &\Longleftrightarrow \\ H(x, y^*) &\le H(x^*, y^*), && \forall x \in S_1 \\ -H(x^*, y) &\le -H(x^*, y^*), && \forall y \in S_2 \\ &\underset{H_1 := H,\ H_2 := -H}{\Longleftrightarrow} \\ H_1(x, y^*) &\le H_1(x^*, y^*), && \forall x \in S_1 \Rightarrow [x^*, y^*] \text{ ist akzeptabel für } P_1 \\ H_2(x^*, y) &\le H_2(x^*, y^*), && \forall y \in S_2 \Rightarrow [x^*, y^*] \text{ ist akzeptabel für } P_2 \end{aligned}$$

  Schlussfolgerung: *Gleichgewichtssituation* verallgemeinert den Begriff des *Sattelpunktes.*

Def. 2.4 (strategische Äquivalenz)
Es seien zwei n-Personen-Spiele in Normalform gegeben:
$\Gamma = \langle P_1, P_2, \ldots, P_n, S_1, S_2, \ldots, S_n, H_1, H_2, \ldots, H_n\rangle$ und
$\hat{\Gamma} = \left\langle P_1, P_2, \ldots, P_n, S_1, S_2, \ldots, S_n, \hat{H}_1, \hat{H}_2, \ldots, \hat{H}_n\right\rangle$
(man beachte: Γ und $\hat{\Gamma}$ teilen sich die gleichen Spieler und Strategiemengen). Wir sagen, dass Γ und $\hat{\Gamma}$ *strategisch äquivalent* sind (kurz: $\Gamma \sim \hat{\Gamma}$), wenn es $n+1$ reelle Zahlen $k, c_1, c_2, \ldots, c_n$ (mit $k > 0$) gibt, sodass:

$$\hat{H}_i(\sigma) = k \cdot H_i(\sigma) + c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \forall \sigma \in \prod_{i=1}^{n} S_i$$

Lemma 2.1 *Die „strategische Äquivalenz"-Relation „$\sim$" ist reflexiv, symmetrisch sowie transitiv (d.h. ist eine Äquivalenzrelation).*

Beweis 2.1

1. Reflexivität $\Gamma \sim \Gamma$: benutze $k = 1, c_i = 0 \quad \forall i$

2. Symmetrie: Wenn $\Gamma \sim \hat{\Gamma}$, dann auch $\hat{\Gamma} \sim \Gamma$, weil $\Gamma \sim \hat{\Gamma}$ bedeutet:

$$\begin{aligned} &\hat{H}_i(\sigma) = k \cdot H_i(\sigma) + c_i, \quad \forall i, \forall \sigma \\ \Rightarrow\ &H_i(\sigma) = \frac{1}{k} \cdot \hat{H}_i(\sigma) - \frac{c_i}{k}, \quad \forall i, \forall \sigma \end{aligned}$$

   (beachte: k muss positiv sein, sonst wird Minimierung zu Maximierung)

$$\Rightarrow \hat{\Gamma} \sim \Gamma$$

3. Transitivität: Es sei gegeben: $\Gamma \sim \hat{\Gamma}$ und $\hat{\Gamma} \sim \hat{\hat{\Gamma}}$. Zu zeigen ist, dass dann auch $\Gamma \sim \hat{\hat{\Gamma}}$.

$$\begin{aligned} &\hat{H}_i = k \cdot H_i + c_i, \quad \hat{\hat{H}}_i = t \cdot \hat{H}_i + \alpha_i \\ \Rightarrow &\hat{\hat{H}}_i = t(k \cdot H_i + c_i) + \alpha_i = tkH_i + (tc_i + \alpha_i) \\ \Rightarrow &\Gamma \sim \hat{\hat{\Gamma}} \end{aligned}$$

Bemerkung 2.3
Die Relation „$\sim$" erzeugt eine Partition aller n-Personen-Spiele mit gleicher Strategiemenge in Klassen solcher Spiele.

Satz 2.2 (Verallgemeinerung von Lemma 1.11, S. 24) *Strategisch äquivalente Spiele besitzen stets die selben Gleichgewichtssituationen.*

Beweis 2.2

- Sei $\Gamma \sim \hat{\Gamma}$.

$$\Rightarrow \hat{H}_i(\sigma) = k \cdot H_i(\sigma) + c_i, \quad \forall i = 1 \ldots n, \quad \forall \sigma \in \prod_{i=1}^{n} S_i \tag{$\triangle$}$$

- Sei $\sigma^* = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ ein Gleichgewichtszustand in Γ.

$$\begin{aligned}
&\xRightarrow[\text{Def. nutzen}]{} H_i(\sigma^*) &&\geq H_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*), && i = 1, \ldots, n \quad \forall \sigma_i \in S_i \\
&\xRightarrow[k>0]{} kH_i(\sigma^*) + c_i &&\geq kH_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) + c_i, && i = 1, \ldots, n \quad \forall \sigma_i \in S_i \\
&\xRightarrow[\text{umstellen}]{} \hat{H}_i(\sigma^*) &&\geq \hat{H}_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) && i = 1, \ldots, n \quad \forall \sigma_i \in S_i
\end{aligned}$$

- Damit ist σ^* ist eine Gleichgewichtssituation in $\hat{\Gamma}$ (Def. Gleichgewichtssituation).

Def. 2.5 (Konstantsummenspiel, Nullsummenspiel)
Sei ein n-Personen-Spiel $\Gamma = \langle P_1, P_2, \ldots, P_n, S_1, S_2, \ldots, S_n, H_1, H_2, \ldots, H_n \rangle$ in Normalform gegeben (nichtkooperativ). Wir nennen es ein *Konstantsummen-Spiel* (*constant-sum game*), wenn es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\sum_{i=1}^{n} H_i(\sigma) = c, \quad \forall \sigma \in \prod_{i=1}^{n} S_i$$

Wenn $c = 0$, so nennen wir Γ ein *Nullsummen-Spiel.*

Satz 2.3 *Sei* $\Gamma = \langle P_1, P_2, \ldots, P_n, S_1, S_2, \ldots, S_n, H_1, H_2, \ldots, H_n \rangle$ *ein n-Personen-Konstantsummen-Spiel in Normalform. Dann ist* Γ *strategisch äquivalent zu einem Nullsummen-Spiel.*

Bemerkung 2.4
Ist Γ ein Konstantsummen-Spiel, so dürfen wir o.B.d.A. annehmen, es handele sich um ein Nullsummen-Spiel.

Beweis 2.3
Sei Γ ein Konstantsummen-Spiel.

1. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $\sum_{i=1}^{n} H_i(\sigma) = c, \quad \forall \sigma \in \prod_{i=1}^{n} S_i$.
2. Wähle $k := 1$ und c_i so, dass $\sum_{i=1}^{n} c_i = -c$ (z.B. $c_i := -\frac{c}{n} \quad \forall i$).

Nun betrachte man das Spiel $\hat{\Gamma} = \left\langle P_1, P_2, \ldots, P_n, S_1, S_2, \ldots, S_n, \hat{H}_1, \hat{H}_2, \ldots, \hat{H}_n \right\rangle$ mit

$$\hat{H}_i(\sigma) = 1 \cdot H_i(\sigma) + c_i$$

Daher: $\Gamma \sim \hat{\Gamma}$. Weiter gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{H}_i(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (H_i(\sigma) + c_i) = \sum_{i=1}^{n} H_i(\sigma) + \sum_{i=1}^{n} c_i \underset{\text{1. und 2.}}{=} c + (-c) = 0 \quad \forall \sigma$$

Somit ist $\hat{\Gamma}$ ein Nullsummen-Spiel. #

2.1.2 Antagonistische Spiele

Def. 2.6 (Antagonistische Spiele)
2-Personen-Nullsummen-Spiele in Normalform werden als *antagonistische Spiele* bezeichnet.

Bemerkung 2.5

1. $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H_1, H_2 \rangle$ ist ein antagonistisches Spiel, wenn

$$H_1(\sigma) + H_2(\sigma) = 0 \quad \forall \sigma \in S_1 \times S_2$$

Wir werden die Notation $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H \rangle$ benutzen, wobei festgelegt wird, dass $H_1 := H$ und $H_2 := -H$ sein soll (wie bei Matrix-Spielen).

2. Matrix-Spiele in reinen oder gemischten Strategien sind antagonistische Spiele.

9.12.2002

Lemma 2.4 *(Generalisierung von Lemma 1.1, S.5 und 1.4, S.12)*
Sei $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H \rangle$ *ein antagonistisches Spiel. Wir bezeichnen mit*
$\underline{v} = \sup\limits_{x \in S_1} \inf\limits_{y \in S_2} H(x, y)$ *den unteren Spielwert des Spieles* Γ
$\overline{v} = \inf\limits_{y \in S_2} \sup\limits_{x \in S_1} H(x, y)$ *den oberen Spielwert des Spieles* Γ
Dann gilt $\underline{v} \leq \overline{v}$.

Beweis 2.4
Sei $x \in S_1$ und $y \in S_2$.

- $\inf\limits_{w \in S_2} H(x, w) \leq H(x, y) \leq \sup\limits_{z \in S_1} H(z, y) \Rightarrow \inf\limits_{w \in S_2} H(x, w) \leq \sup\limits_{z \in S_1} H(z, y) \quad \forall x \in S_1, \forall y \in S_2$
- Der linke Teil hängt nicht von y ab, also folgt:
  $\inf\limits_{w \in S_2} H(x, w) \leq \inf\limits_{y \in S_2} \sup\limits_{z \in S_1} H(z, y) \quad \forall x \in S_1$
- Da der rechte Teil nicht von x abhängt, gilt:
  $\sup\limits_{x \in S_1} \inf\limits_{w \in S_2} H(x, w) \leq \inf\limits_{y \in S_2} \sup\limits_{z \in S_1} H(z, y) \quad \Rightarrow \quad \underline{v} \leq \overline{v}$

#

Bemerkung 2.6
Wenn ein $x^* \in S_1$ existiert, das $\underline{v}$ realisiert (d.h. $\inf\limits_{y \in S_2} H(x^*, y) = \sup\limits_{x \in S_1} \inf\limits_{y \in S_2} H(x, y)$), dann bekommt P_1 mindestens einen Gewinn gleich $\underline{v}$, wenn er x^* spielt. (Der Gewinn von P_1 ist nicht kleiner als $\underline{v}$).

Satz 2.5 (Generalisierung von Lemma 1.2, S.7 und 1.5, S.13)
Sei $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H \rangle$ *ein antagonistisches Spiel. Dann existiert in* Γ *eine Gleichgewichtssituation* $\Longleftrightarrow$ *(i) und (ii) gelten:*

(i) In $\underline{v} = \sup\limits_{x \in S_1} \inf\limits_{y \in S_2} H(x, y)$ *wird das äußere Extremum angenommen*
(d.h. $\exists x^* \in S_1$ *mit* $\underline{v} = \inf\limits_{y \in S_2} H(x^*, y)$*).*
In $\overline{v} = \inf\limits_{y \in S_2} \sup\limits_{x \in S_1} H(x, y)$ *wird das äußere Extremum angenommen*
(d.h. $\exists y^* \in S_2$ *mit* $\overline{v} = \sup\limits_{x \in S_1} H(x, y^*)$*).*

(ii) $\underline{v} = \overline{v}$

Beweis 2.5

$\Rightarrow$: Angenommen eine Gleichgewichtssituation existiert.

- Aus der Definition GGS folgt $\exists[x^*,y^*] \in S_1 \times S_2$ so dass

$$\begin{cases} H(x,y^*) \leq H(x^*,y^*) & \forall x \in S_1 \quad (\triangle) \\ H(x^*,y^*) \leq H(x^*,y) & \forall y \in S_2 \quad (\triangle\triangle) \end{cases}$$

- $$\sup_{x\in S_1} H(x,y^*) \underset{(\triangle)}{\underset{\uparrow}{\leq}} H(x^*,y^*) \underset{(\triangle\triangle)}{\underset{\uparrow}{\leq}} \inf_{y\in S_2} H(x^*,y) \qquad (\circ)$$

$\Rightarrow$ $\sup\limits_{x\in S_1} H(x,y^*) \leq \inf\limits_{y\in S_2} H(x^*,y)$

- Aus den Definitionen für Infimum und Supremum ergibt sich

$$\overline{v} = \inf_{y\in S_2}\sup_{x\in S_1} H(x,y) \leq \sup_{x\in S_1} H(x,y^*) \leq \inf_{y\in S_2} H(x^*,y) \leq \sup_{xy\in S_1}\inf_{y\in S_2} H(x,y) = \underline{v} \qquad (\square)$$

- Nach Lemma 2.4 gilt $\underline{v} \leq \overline{v}$ und nach $(\square)$ gilt $\underline{v} \geq \overline{v} \Rightarrow \underline{v} = \overline{v} \Rightarrow$ (ii) ist erfüllt.
- Aus $(\square)$ und aus $\underline{v} = \overline{v}$ folgt, dass

$$\sup_{x\in S_1} H(x,y^*) = \inf_{y\in S_2} H(x^*,y) = \underline{v} = \overline{v}$$

- Aus $(\circ)$ folgt somit

$$\sup_{x\in S_1} H(x,y^*) = H(x^*,y^*) = \inf_{y\in S_2} H(x^*,y) = \underline{v} = \overline{v}$$

- Es gilt also $\overline{v} = \sup\limits_{x\in S_1} H(x,y^*)$
- Aus $\overline{v} = \inf\limits_{y\in S_2}\sup\limits_{x\in S_1} H(x,y)$ folgt

$$\inf_{y\in S_2}\sup_{x\in S_1} H(x,y) = \sup_{x\in S_1} H(x,y^*)$$

- Da $y \in S_2$ wird das äußere Infimum in $\inf\limits_{y\in S_2}\sup\limits_{x\in S_1} H(x,y)$ an $y = y^*$ angenommen.
- Es gilt weiterhin $\underline{v} = \inf\limits_{y\in S_2} H(x^*,y)$
- Da $x \in S_1$ wird das äußere Supremum in $\sup\limits_{x\in S_1}\inf\limits_{y\in S_2} H(x,y)$ an $x = x^*$ angenommen.

$\Rightarrow$ (i) gilt.

$\Leftarrow$: Nehmen wir nun an, dass (i) und (ii) gelten.

- Die äußeren Extrema werden angenommen, d.h. $\exists x^0 \in S_1$ $\exists y^0 \in S_2$, so dass

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{v} = \sup\limits_{x\in S_1}\inf\limits_{y\in S_2} H(x,y) = \inf\limits_{y\in S_2} H(x^0,y) \\ \overline{v} = \inf\limits_{y\in S_2}\sup\limits_{x\in S_1} H(x,y) = \sup\limits_{x\in S_1} H(x,y^0) \end{array}\right\} \underset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow} \inf_{y\in S_2} H(x^0,y) = \sup_{x\in S_1} H(x,y^0) \qquad (\nabla)$$

- Im Allgemeinen ist

$$\inf_{y\in S_2} H(x^0,y) \underset{y^0\in S_2}{\underset{\uparrow}{\leq}} H(x^0,y^0) \underset{x^0\in S_1}{\underset{\uparrow}{\leq}} \sup_{x\in S_1} H(x,y^0)$$

- Mit (∇) folgt

$$\underbrace{\inf_{y \in S_2} H(x^0, y) = H(x^0, y^0)}_{(1)} = \underbrace{H(x^0, y^0) = \sup_{x \in S_1} H(x, y^0)}_{(2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{(1)}{\Longrightarrow} H(x^0, y^0) \leq H(x^0, y) \quad \forall y \in S_2 \\ \underset{(2)}{\Longrightarrow} H(x, y^0) \leq H(x^0, y^0) \quad \forall x \in S_1 \end{array}\right\} \xrightarrow[Def.GGS]{} [x^0, y^0] \text{ ist eine GGS in } \Gamma.$$

#

Bemerkung 2.7
Wenn $[x^*, y^*]$ eine GGS ist, dann gilt $\underline{v} = \overline{v} = H(x^*, y^*)$.

Def. 2.7 (Optimale Strategie, Wert des Spieles)
Sei $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H\rangle$ ein antagonistisches Spiel. Sei $[x^*, y^*]$ eine GGS in Γ. Dann nennen wir x^* (y^*) eine *optimale Strategie* von P_1 (P_2) in Γ.
Der Wert $v \stackrel{def}{=} H(x^*, y^*)$ wird der *Wert des Spieles* genannt.

Bemerkung 2.8

- Wenn x^* eine optimale Strategie von P_1 ist, dann heißt das per Definition: Es existiert ein $y^* \in S_2$, so dass $[x^*, y^*]$ eine GGS in Γ ist.
  $\xrightarrow[Def.GGS]{} v = H(x^*, y^*) \leq H(x^*, y) \quad \forall y \in S_2$. Das heißt, für jede Strategie von P_2 ist der Gewinn von P_1 mindestens v, wenn er seine optimale Strategie x^* spielt.

- Wenn y^* eine optimale Strategie von P_2 ist, dann heißt das per Definition: Es existiert ein $x^* \in S_1$, so dass $[x^*, y^*]$ eine GGS in Γ ist.
  $\xrightarrow[Def.GGS]{} v = H(x^*, y^*) \geq H(x, y^*) \quad \forall x \in S_1$. Das heißt, für jede Strategie von P_1 ist der Verlust von P_2 höchstens v, wenn er seine optimale Strategie y^* spielt.

Folgerung 2.6 (Generalisierung von Lemma 1.3, S.8 und Satz 1.8, S.16)
Sei $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H\rangle$ *ein antagonistisches Spiel. Seien* $[x^*, y^*]$ *und* $[x^0, y^0]$ *GGSn in* Γ. *Dann sind auch* $[x^0, y^*]$ *und* $[x^*, y^0]$ *GGSn. Außerdem gilt*

$$H(x^*, y^*) = H(x^0, y^*) = H(x^*, y^0) = H(x^0, y^0)$$

Beweis 2.6
Übung...

Bemerkung 2.9

1. Der Wert eines antagonistischen Spieles ist wohldefiniert, da er nicht von einer bestimmten GGS abhängt.

2. Wenn $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H_1, H_2\rangle$ ein Zwei-Personen nicht-kooperatives Spiel in Normalform ist, aber kein Konstantsummenspiel, dann müssen die zwei Eigenschaften von Folgerung 2.6 nicht gelten:
   Wenn $[x^*, y^*]$ und $[x^0, y^0]$ GGSn sind, dann müssen $[x^0, y^*]$ und $[x^*, y^0]$ keine GGSn sein und es kann gelten $H(x^*, y^*) \neq H(x^0, y^0)$.

Def. 2.8 (Isomorphie von Spielen)
Seien $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H\rangle$ und $\Gamma' = \langle P_1', P_2', S_1', S_2', H'\rangle$ zwei antagonistische Spiele. Wir sagen, dass Γ und Γ' *isomorph* sind, wenn zwei bijektive Abbildungen Φ und Ψ existieren:

$$\begin{aligned}\Phi &: S_1 \to S_1' \\ \Psi &: S_2 \to S_2'\end{aligned}$$

mit

$$H'\big(\Phi(x), \Psi(y)\big) = H(x,y) \quad \forall x \in S_1, \forall y \in S_2$$

Lemma 2.7 *Seien* $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H\rangle$ *und* $\Gamma' = \langle P_1', P_2', S_1', S_2', H'\rangle$ *zwei isomorphe antagonistische Spiele. Dann gilt:*

$$[x^*, y^*] \text{ ist GGS in } \Gamma \Longleftrightarrow [\Phi(x^*), \Psi(y^*)] \text{ ist GGS in } \Gamma'$$

11.12.2002

2.2 Spiele auf dem Einheitsquadrat

2.2.0 Einführung

Def. 2.9 Sei $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H\rangle$ ein antagonistisches Spiel. Wir nennen Γ ein Spiel auf dem Einheitsquadrat, wenn $S_1 = S_2 = [0,1] \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$.

Bemerkung 2.10

1. P_1 muss ein $x \in [0,1]$ unabhängig von P_2 wählen, der seinerseits ein $y \in [0,1]$ zu wählen hat. Nach dem Spiel zahlt P_2 an P_1 den Wert $H(x,y)$.
2. Da Γ zu den antagonistischen Spielen gehört, ist die Lösung des Spiels definiert als Gleichgewichtssituation. Satz 2.5 liefert eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer solchen Gleichgewichtssituation.
3. Das nächste Beispiel zeigt, dass ein solches Spiel im Allgemeinen keine Lösung besitzt. Deswegen werden wir Γ durch seine *gemischte Erweiterung* ersetzen.

Beispiel 2.1
Sei $H(x,y) = (x-y)^2$. Interpretation: P_1 möchte so weit wie möglich von P_2 entfernt sein (Verfolgungsspiel).

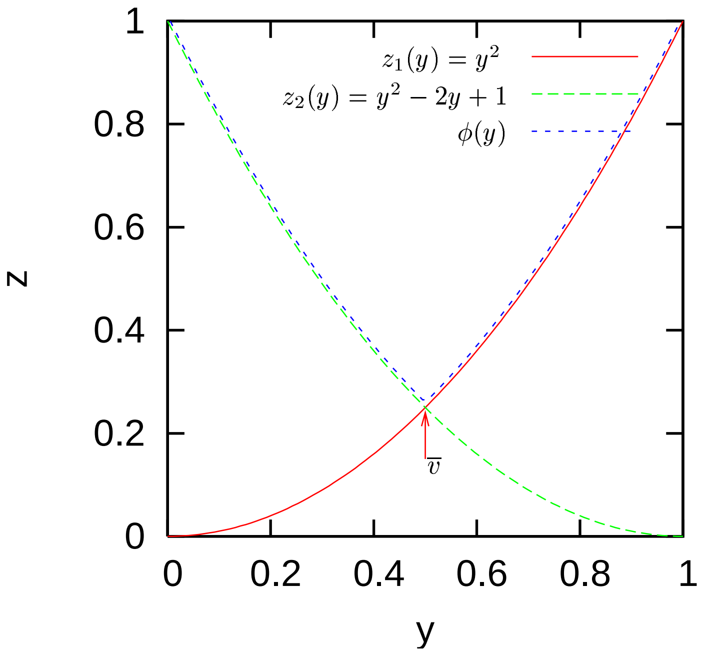
- Satz 2.5 sagt über die Existenz einer Gleichgewichtssituation: $\underline{v} = \overline{v}$.
-
$$\begin{aligned}\underline{v} &\stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{x\in[0,1]} \inf_{y\in[0,1]} H(x,y) = \sup_x \inf_y H(x,y) \\ &= \sup_x \inf_y (x-y)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ y = x \text{ ist} \\ \text{mögl. Ent-} \\ \text{scheidung} \\ \text{von } P_2}}{\leq} \sup_x (x-x)^2\end{aligned}$$

  Da aber $(x-y)^2 \geq 0 \quad \forall x, \forall y$, so ist $\underline{v} = 0$.
-
$$\overline{v} \stackrel{\text{def.}}{=} \inf_{y\in[0,1]} \underbrace{\sup_{x\in[0,1]} (x-y)^2}_{\phi(y)}$$

$$\phi(y) = \sup_{x\in[0,1]} (x-y)^2 = \sup_x\{x^2 - 2xy + y^2\} = \max\{1 - 2\cdot 1y + y^2, 0^2 - 2\cdot 0y + y^2\}$$

($x^2 - 2xy + y^2$ ist eine konvexe Funktion bezüglich x. Das Supremum wird am Rand von $[0, 1]$ angenommen — siehe „Optimierung I".)

$$\Rightarrow \phi(y) = \max\{y^2 - 2y + 1, y^2\} \Rightarrow \overline{v} = \inf_{y \in [0,1]} \phi(y)$$



$\Rightarrow \overline{v} = \frac{1}{4}$
$\Rightarrow \underline{v} \neq \overline{v} \xRightarrow{\text{Satz 2.5}}$ Es gibt keine Gleichgewichtssituation.

2.2.1 Die gemischte Erweiterung

- Das Beispiel zeigt: In reinen Strategien x und y ist Γ im Allgemeinen nicht lösbar.
- Wir gehen daher von $S_1 = [0, 1]$ über zu $\hat{S}_1$ = Menge aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen über $[0, 1]$. Genauso wird S_2 zu $\hat{S}_2$ (Idee dabei ist die Randomisierung).
- In Γ war die Gewinnfunktion $H(x, y)$ mit $H : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$. Wenn P_1 ein $F \in \hat{S}_1$ wählt und P_2 ein $G \in \hat{S}_2$, dann sollte der Gewinn von P_1 dem Erwartungswert entsprechen. Aus dem Kurs „Stochastik" wissen wir, dass

$$\int_0^1 \int_0^1 H(x, y)\, dF(x) dG(y)$$

dem erwarteten Gewinn von P_1 entspricht, wenn P_1 seine Entscheidung entsprechend der Verteilungsfunktion F trifft und P_2 entsprechend G.

Def. 2.10 (gemischte Erweiterung)
Sei ein Spiel $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H \rangle$ auf dem Einheitsquadrat gegeben. Seien $\hat{S}_1$, $\hat{S}_1$ definiert wie oben und sei

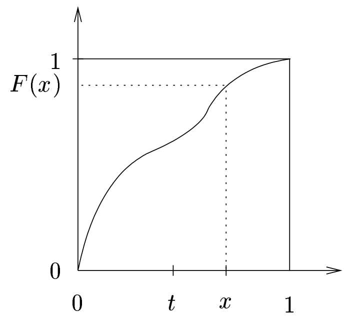
$$\hat{H}(F, G) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_0^1 \int_0^1 H(x, y)\, dF(x) dG(y)$$

Dann heißt das antagonistische Spiel $\hat{\Gamma} = \left\langle P_1, P_2, \hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{H} \right\rangle$ die *gemischte Erweiterung* von Γ.

Bemerkung 2.11

1. Das Spiel Γ wird gespielt wie gewohnt: P_1 wählt ein $F \in \hat{S}_1$, P_2 wählt ein $G \in \hat{S}_2$, danach zahlt P_2 den Betrag $\hat{H}(F, G)$ an P_1. (Als Mathematiker vernachlässigen wir die Tatsache, dass P_1 in Wirklichkeit nicht F wählt, sondern ein $x \in [0, 1]$ gemäß F, und P_2 nicht G wählt, sondern ein $y \in [0, 1]$ gemäß G. Zudem bezahlt P_2 nicht wirklich $\hat{H}(F, G)$ an P_1, sondern $H(x, y)$.)

2. Ist F eine Verteilungsfunktion über $[0, 1]$, dann ist $F(x) = P(t < x)$ gleich der Wahrscheinlichkeit, dass ein t kleiner x gewählt wird.

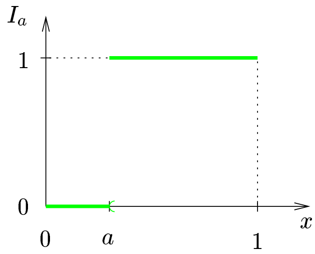


3. Eine Verteilungsfunktion F über $[0, 1]$ hat die folgenden Eigenschaften:
   - $F(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0, 1]$
   - $F(0) = 0$
   - $F(1) = 1$
   - Ist $x < x'$ $(x, x' \in [0, 1])$, so gilt $F(x) \leq F(x')$
   - $\lim_{\epsilon \to +0} F(x + \epsilon) = F(x)$ (einseitig stetig von rechts)

4. Es gibt ein Skript zum Stieltjes-Integral zum Download unter
   `http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/Skripte/Beer/Beer.stieltjes.ps`

5. Das Stieltjes-Integral
$$\int_0^1 \int_0^1 H(x, y)\, dF(x) dG(y)$$
   existiert z.B., wenn H stetig auf $[0, 1] \times [0, 1]$ oder wenn H beschränkt auf $[0, 1] \times [0, 1]$ ist.

6. Man kann leicht sehen, dass Γ (Spiel in reinen Strategien) in $\hat{\Gamma}$ eingebettet ist, denn mit $a \in [0, 1]$ können wir eine Verteilungsfunktion $I_a(x)$ wie folgt konstruieren:
   - Für $a > 0$:
$$I_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < a \\ 1 & \text{wenn } x \geq a \end{cases}$$
   - Für $a = 0$:
$$I_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = 0 \\ 1 & \text{wenn } x > 0 \end{cases}$$



Offentsichtlich gilt:

$$\hat{H}(I_a, I_b) = \int_0^1 \int_0^1 H(x,y)\, dF(x) dG(y) = H(a,b)$$

Somit entspricht die Situation $[F,G] = [I_a, I_b]$ in $\hat{\Gamma}$ völlig der Situation $[x,y] = [a,b]$ in Γ.

7. Das Spiel $\hat{\Gamma} = \left\langle P_1, P_2, \hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{H} \right\rangle$ ist ein antagonistisches Spiel, d.h. alle Aussagen aus 2.1.2 sind auf $\hat{\Gamma}$ anwendbar. Satz 2.5 sagt aus, dass eine Gleichgewichtssituation $[F^*, G^*]$ im Spiel $\hat{\Gamma}$ genau dann existiert, wenn:

   - in $\hat{\underline{v}} \overset{\text{def.}}{=} \sup\limits_{F \in \hat{S}_1} \inf\limits_{G \in \hat{S}_2} \hat{H}(F,G)$ das äußere Supremum angenommen wird,
   - in $\hat{\overline{v}} \overset{\text{def.}}{=} \inf\limits_{G \in \hat{S}_2} \sup\limits_{F \in \hat{S}_1} \hat{H}(F,G)$ das äußere Infimum angenommen wird,
   - und $\hat{\underline{v}} = \hat{\overline{v}}$.

Satz 2.8 (Hauptsatz für Spiele auf dem Einheitsquadrat) *Sei ein Spiel*

$$\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H \rangle$$

auf dem Einheitsquadrat gegeben und seine gemischte Erweiterung

$$\hat{\Gamma} = \left\langle P_1, P_2, \hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{H} \right\rangle.$$

Dann gilt: Ist H stetig (als Funktion zweier Variablen) auf $[0,1] \times [0,1]$, dann existiert in $\hat{\Gamma}$ eine Gleichgewichtssituation.

Bemerkung 2.12
Ohne Stetigkeit von H auf dem Einheitsquadrat kann es passieren, dass in $\hat{\Gamma}$ keine Gleichgewichtssituation existiert, d.h. das Spiel nicht in gemischten Strategien lösbar ist.

16.12.2002

Beweis 2.7

0. Satz 2.5 besagt: wenn das äußere Extremum in $\hat{\underline{v}}$ und $\hat{\overline{v}}$ jeweils erreicht wird und $\hat{\underline{v}} = \hat{\overline{v}}$, so existiert eine Gleichgewichtssituation.

1. - Nach Def. von $\underline{v}$ gilt:

     $$\hat{\underline{v}} = \sup_{F \in S_1} \inf_{G \in S_2} \hat{H}(F,G)$$

     Wir zeigen nun, dass ein $F_0 \in \hat{S}_1$ existiert, sodass

     $$\hat{\underline{v}} = \inf_{G \in \hat{S}_2} \hat{H}(F_0, G)$$

     (Der Beweis für $\hat{\overline{v}}$ verläuft ähnlich.)

- Es gilt:

$$\begin{aligned}
\underline{\hat{v}} &= \sup_F \inf_G \hat{H}(F,G) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. von } \hat{H}}}{=} \sup_F \inf_G \int_0^1 \int_0^1 H(x,y)\,dF(x)\,dG(y) \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eigenschaft 23} \\ \text{im Skript} \\ \text{Stieltjes-} \\ \text{Integral}}}{=} \sup_F \min_{0\le y\le 1} \int_0^1 H(x,y)\,dF(x)
\end{aligned}$$

wobei Eigenschaft 23 besagt:

$$\inf_G \int_0^1 \phi(y)\ dG(y) = \min_{0\le y\le 1} \phi(y), \text{ wenn } \phi \text{ stetig}$$

- Ist ein $\epsilon = \frac{1}{n} > 0$ gegeben, so existiert nach der Def. von „sup" ein $F_n \in \hat{S}_1$, sodass:

$$\min_y \int_0^1 H(x,y)\,dF_n(x) \le \underline{\hat{v}} \le \min_y \int_0^1 H(x,y)\,dF_n(x) + \epsilon_n \qquad (\circ)$$

Für $n = 1,2,3,\ldots$ erhalten wir eine Folge $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, deren Glieder alle $(\circ)$ erfüllen. Eine solche Folge enthält (nach Eigenschaft 27 Stieltjes-Integral) eine *schwach konvergente* Teilfolge, sodass wir o.B.d.A. annehmen dürfen, dass bereits $\{F_n\}$ schwach konvergiert. Folglich existiert

$$F_0 := \lim_{n\to\infty} F_n$$

Bemerkung: *Schwache Konvergenz* heißt: Ist F_0 stetig an einer festen Stelle x, so gilt $F_0(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$.

- Obwohl $F_n \in \hat{S}_1\ \forall n$, muss F_0 nicht notwendigerweise zu $\hat{S}_1$ gehören. Wir können jedoch sicher sein, dass $F_0(x)$ monoton wachsend (nicht unbedingt streng wachsend) ist. Wir setzen daher

$$\overline{F}_0(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x = 1 \\ \lim\limits_{\epsilon\to+0} F_0(x+\epsilon), & x \in (0,1) \end{cases}$$

Damit ist $\overline{F}_0 \in \hat{S}_1$ und $\overline{F}_0$ unterscheidet sich von F_0 nur noch in Unstetigkeitsstellen von F_0. Weil diese Menge abzählbar ist, gilt:

$$\int_0^1 H(x,y)\,dF_0(x) = \int_0^1 H(x,y)\,d\overline{F}_0(x) \qquad (\square)$$

- Ferner gilt nach Eigenschaft 27 (Stieltjes-Integral):

$$\int_0^1 H(x,y)\,dF_0(x) \underset{\substack{\uparrow \\ F_0 = \lim_{n\to\infty} F_n \\ H \text{ stetig}}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 H(x,y)\,dF_n(x)$$

Daraus folgt mit ($\Box$):

$$\int_0^1 H(x,y)\, d\overline{F}_0(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 H(x,y)\, dF_n(x)$$

Aus ($\circ$) erhalten wir für $n \to \infty$:

$$\underline{\hat{v}} \le \min_{0\le y\le 1} \int_0^1 H(x,y)\, d\overline{F}_0(x) \qquad (\triangle)$$

- Für jedes $F \in \hat{S}_1$ gilt aber (nach der Def. von $\underline{v}$ als Supremum):

$$\underline{\hat{v}} \ge \min_{0\le y\le 1} \int_0^1 H(x,y)\, dF(x)$$

$$\xRightarrow[\overline{F}_0 \,\in\, \hat{S}_1]{} \quad \underline{\hat{v}} \ge \min_{0\le y\le 1} \int_0^1 H(x,y)\, d\overline{F}_0(x)$$

Mit ($\triangle$) folgt:

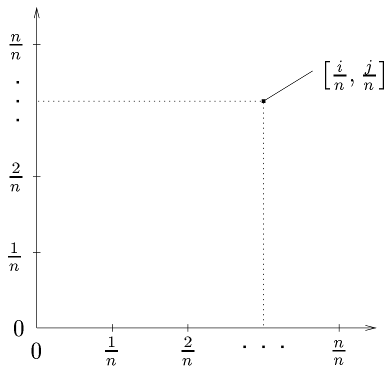
$$\begin{aligned}
\underline{\hat{v}} = \min_{0\le y\le 1} \int_0^1 H(x,y)\, d\overline{F}_0(x) &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eigenschaft 23}}}{=} \\
= \inf_{G\in\hat{S}_2} \int_0^1 \int_0^1 H(x,y)\, d\overline{F}_0(x) dG(y) & \\
= \inf_{G\in\hat{S}_2} \hat{H}(\overline{F}_0, G) &
\end{aligned}$$

Das bedeutet, das äußere Supremum in der Definition von $\underline{\hat{v}}$ wird tatsächlich erreicht.

QED — 1. Teil

2. Wir werden nun zeigen, dass $\underline{\hat{v}} = \hat{\overline{v}}$.

   - Dazu setzen wir wieder $\epsilon = \frac{1}{n}$ und betrachten die Punkte $\left[\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right]$, wobei $0 \le i \le n$ und $0 \le j \le n$.



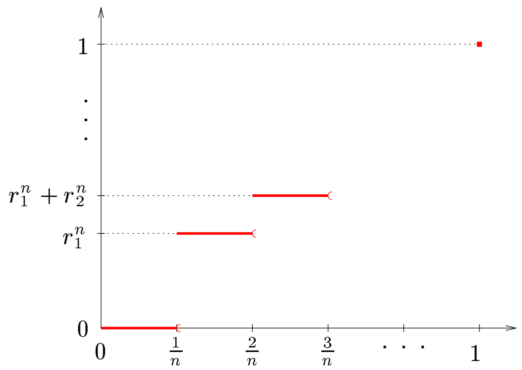
Wir definieren die Matrix

$$A_n := \{a_{ij}^n\}_{i,j=1}^n$$

Dabei ist

$$a_{ij}^n = H\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right), \quad \forall n, \forall i, \forall j$$

- Das Matrixspiel mit Matrix A_n hat (siehe Hauptsatz Matrix-Spiele) einen Sattelpunkt
  $\Rightarrow$ $\exists$ eine optimale Strategie $r^n = [r_1^n, \ldots, r_n^n]$ für den ersten Spieler
  $\Rightarrow$ $\exists$ eine optimale Strategie $s^n = [s_1^n, \ldots, s_n^n]$ für den zweiten Spieler
  $\Rightarrow$ Der Wert des Spiels mit A_n ist $w_n = \langle r^n, A_n s^n \rangle$.
- H ist stetig auf $S_1 \times S_2 = [0,1] \times [0,1]$. Damit ist H ***gleichmäßig stetig***, denn $S_1 \times S_2$ ist ***kompakt***, d.h. beschränkt und abgeschlossen. Wir erhalten damit, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existieren muss, sodass
$$|H(x,y) - H(x',y')| < \epsilon$$
  sobald
$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} < \delta$$
- Es sei eine Folge $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $\epsilon_{n+1} < \epsilon_n, \forall n$ und $\epsilon_n \to 0$ gegeben und es sei $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ die zugehörige Folge der δ_n entsprechend der gleichmäßigen Stetigkeit von H. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $\delta_{n+1} < \delta_n \, \forall n$. Damit existiert eine Teilfolge $\{\epsilon_{n_i}\}_{n=1}^{\infty}$ so, dass für die zugehörigen $\{\delta_{n_i}\}_{n=1}^{\infty}$ gilt $\delta_{n_i} \geq \frac{1}{i}$. O.B.d.A. gelte das bereits für die Aussgangsfolge, d.h. $\delta_n \geq \frac{1}{n}$
- Sei $y \in [0,1]$ gegeben. Wir bezeichnen mit $j(y)$ die natürliche Zahl $\lfloor ny \rfloor$, also $j(y) = k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sodass $k \leq ny < (k+1)$. Man beachte, dass stets gilt:
$$\left| y - \frac{j(y)}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \left| y - \frac{j(y)}{n} \right| < \delta_n \qquad (*)$$
- Wir ordnen nun der Lösung $[r^n, s^n]$ des Matrix-Spiels mit A_n die Verteilungsfunktion $F_n(x)$ zu (eine Stufenfunktion):
$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \sum_{i=1}^{k} r_i^n, & \frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n} \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$



- Wir betrachten nun die zwei Punkte $[x,y] \in S_1 \times S_1$ und $\left[x, \frac{j(y)}{n}\right]$.
- Aus $(*)$ erhalten wir:
$$\sqrt{(x-x)^2 + \left(y - \frac{j(y)}{n}\right)^2} < \delta_n$$
  Somit gilt auch (nutzen gleichmäßige Stetigkeit):
$$\left| H(x,y) - H\left(x, \frac{j(y)}{n}\right) \right| < \epsilon_n$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(H\left(x, \frac{j(y)}{n}\right) - H(x,y)\right) dF_n(x) \\
&\leq \int_0^1 \left| H\left(x, \frac{j(y)}{n}\right) - H(x,y)\right| dF_n(x) \\
&\leq \epsilon \int_0^1 dF_n(x) \underset{\text{Eigenschaft 18}}{\underset{\uparrow}{=}} \\
&= \epsilon_n
\end{aligned}$$

Daher weiter:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 H(x,y)\, dF_n(x) \\
\geq\ &\int_0^1 H\left(x, \frac{j(y)}{n}\right) dF_n(x) - \epsilon_n \\
\underset{\text{Eigenschaft 17}}{\underset{\uparrow}{=}}\ &\sum_{i=1}^n H\left(\frac{i}{n}, \frac{j(y)}{n}\right) \cdot r_i^n - \epsilon_n \\
\underset{\text{Def. } A_n = \{a_{ij}^n\}}{\underset{\uparrow}{=}}\ &\sum_{i=1}^n a_{i,j(y)} \cdot r_i^n - \epsilon_n \\
=\ &\left\langle r^n, Ae^{j(y)} \right\rangle - \epsilon_n \\
\geq\ &w_n - \epsilon_n \quad \left(\left\langle x^*, Ae^j \right\rangle \geq z^* \text{ für jede optimale Lösung } [x^*, z^*] \text{ des linearen Optimierungsproblems } (P_1),\ r^n \hat{=} y^*, w_n = z^* \right)
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\underline{\hat{v}} \underset{\text{Def. } \underline{v}}{\underset{\uparrow}{=}}\ &\sup \inf \iint H(x,y)\, dF(x) dG(y) \\
\underset{F_n \in \hat{S}_1}{\underset{\uparrow}{\geq}}\ &\inf \int_0^1 \int_0^1 H(x,y)\, dF_n(x) dG(y) \\
\underset{\text{Eigenschaft 23}}{\underset{\uparrow}{=}}\ &\min_{0 \leq y \leq 1} \int_0^1 H(x,y)\, dF_n(x) \\
\geq\ &w_n - \epsilon_n
\end{aligned}$$

Somit schließlich:

$$\underline{\hat{v}} \geq w_n - \epsilon_n$$

- Analog lässt sich zeigen, dass

$$\hat{\overline{v}} \leq w_n + \epsilon_n$$

Daraus lässt sich ableiten:

$$w_n - \epsilon_n \leq \underline{\hat{v}} \underset{\text{Lemma 2.4}}{\underset{\uparrow}{\leq}} \hat{\overline{v}} \leq w_n + \epsilon_n \qquad (\diamond)$$

- Da $w_n = \langle r^n, A_n s^n\rangle$, $A_n = \{a_{ij}^n\}$, $a_{ij}^n = H\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$ und H stetig über $[0,1]\times[0,1]$, gibt es eine Konstante c, sodass

$$|H(x,y)| \le c \quad \forall (x,y) \in [0,1]^2$$

$$\Rightarrow |w_n| = c \cdot \left| \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} r_i^n a_{ij}^n s_j^n \right| \le c \cdot \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} r_i^n s_j^n \underset{\substack{\uparrow \\ \sum r^n = 1 \\ \sum s_j^n = 1}}{=} c$$

- Aus $|w_n| \le c$ schließen wir, dass es eine konvergente Teilfolge in $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ geben muss, o.B.d.A. sei bereits $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent, d.h. $\overline{w} = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$.
- Mit $(\diamond)$ gilt für $n \to \infty$:

$$\overline{w} - 0 \le \underline{\hat{v}} \le \hat{\overline{v}} \le \overline{w} + 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\hat{v}} = \hat{\overline{v}}$$

#

18.12.2002

Bemerkung 2.13

1. Der Beweis des Satzes erlaubt es uns, eine Näherung des Spieles und seiner Lösung zu konstruieren: Der Wert w_n ist eine Näherung vom Wert $\hat{v}$ des Spieles $\hat{\Gamma}$ und die Stufenfunktion $F_n(x)$ ist eine Näherung der optimalen Strategie $F^* \in \hat{S}_1$ von Spieler P_1 ($w_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \hat{w}$, $F_n \to F^*$ (schwache Konvergenz))
2. Diesselbe Konstruktion ist für den Spieler P_2 möglich (aus demselben Matrixspiel mit Matrix A_n kann man ein $G_n \to G^* \in \hat{S}_2$ konstruieren, G^* ist eine optimale Strategie von P_2).
3. Aus Satz 2.5 wissen wir, dass $[F^*, G^*]$ ein Paar optimaler Strategien ist $\Leftrightarrow$

$$\sup_{F\in S_1}\inf_{G\in S_2} \hat{H}(F,G) = \inf_{G\in S_2} \hat{H}(F^*,G) = \inf_{G\in S_2}\sup_{F\in S_1} \hat{H}(F,G) = \sup_{F\in S_1} \hat{H}(F,G^*) = \hat{v} = \hat{H}(F^*,G^*)$$

Letztendlich haben wir zu beweisen:

$$\inf_{G\in S_2} \hat{H}(F^*,G) = \sup_{F\in S_1} \hat{H}(F,G^*)$$

Allerdings ist

$$\hat{H}(F,G) = \int_0^1\int_0^1 H(x,y)\, dF(x) dG(y)$$

Aus Eigenschaft 23 (Skript über Stieltjes-Integrale) egibt sich:

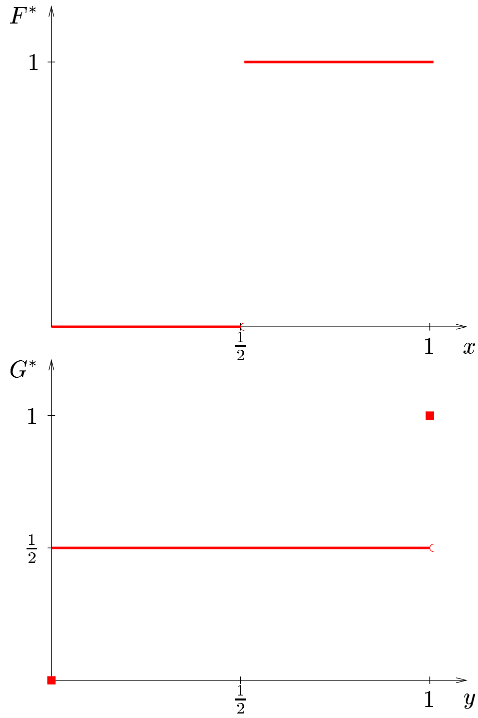
$$\inf_{G\in S_2} \int_0^1\int_0^1 H(x,y)\, dF^*(x) dG(y) = \min_{y\in[0,1]} \int_0^1 H(x,y)\, dF^*(x)$$

$$\sup_{F\in S_1} \int_0^1\int_0^1 H(x,y)\, dF(x) dG^*(y) = \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 H(x,y)\, dG^*(y)$$

Also müssen wir, wenn wir beweisen wollen, dass $[F^*, G^*]$ ein Paar optimaler Strategien ist, beweisen, dass

$$\min_{y\in[0,1]} \int_0^1 H(x,y)\, dF^*(x) = \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 H(x,y)\, dG^*(y)$$

Beispiel 2.2
Sei Γ ein Spiel auf dem Einheitsquadrat mit der Funktion $H(x,y) = \frac{1}{1+(x-y)^2}$. Seien außerdem $F^*(x) = I_{\frac{1}{2}}(x), \quad G^*(x) = \frac{1}{2}I_0(y) + \frac{1}{2}I_1(y)$.



Wir wollen zeigen, dass $[F^*, G^*]$ ein Paar optimaler Strategien im Spiel mit $H = \frac{1}{1+(x-y)^2}$ ist.

$$\min_{y\in[0,1]} \int_0^1 H(x,y)\,dF^*(x) = \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 H(x,y)\,dG^*(y)$$

Wenn dies gilt, dann ergibt sich der Wert $\hat{v}$ des Spieles zu

$$\hat{v} = \hat{H}(F^*, G^*) = \int_0^1 \int_0^1 H(x,y)\,dF^*(x)dG^*(y) \qquad (\diamond)$$

- Wir wollen $(\diamond)$ berechnen:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+(x-y)^2} dF^*(x) \underset{\substack{\uparrow \\ F^* \text{ ist konstant auf} \\ [0,1] \text{ außer in } x^0 = \frac{1}{2}}}{=} \frac{1}{1+(\frac{1}{2}-y)^2} \cdot 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1+(x-y)^2}\,dF^*(x)dG^*(y) = \int_0^1 \frac{1}{1+(\frac{1}{2}-y)^2}\,dG^*(y)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ G^* \text{ ist konstant auf} \\ [0,1] \text{ außer in} \\ x^0 = 0,\, x^1 = 1, \text{ Sprung} \\ \text{der Höhe } \frac{1}{2} \text{ bei beiden}}}{=} \frac{1}{1+(\frac{1}{2}-0)^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{2}-1)^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{5}{4}} + \frac{1}{\frac{5}{4}}\right) = \frac{4}{5} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn } [F^*, G^*] \text{ wirklich} \\ \text{ein Paar optimaler} \\ \text{Strategien ist}}}{=} \hat{v}$$

- Es bleibt also zu zeigen

$$\min_{y\in[0,1]} \int_0^1 H(x,y)\, dF^*(x) = \frac{4}{5} \tag{$\Box$}$$

$$\max_{x\in[0,1]} \int_0^1 H(x,y)\, dG^*(y) = \frac{4}{5} \tag{$\Box\Box$}$$

($\Box$) Setze ϕ wie folgt:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+(x-y)^2}\, dF^*(x) = \frac{1}{1+(\frac{1}{2}-y)^2} =: \phi(y)$$

Wir werden zeigen, dass ϕ auf $[0,1]$ konkav ist. Da ϕ auf $[0,1]$ zweimal differenzierbar ist, gilt

$$\phi \text{ ist konkav auf } [0,1] \Leftrightarrow \phi''(y) \leq 0 \quad \forall y \in [0,1]$$

$$\begin{aligned} \phi'(y) &= \left(\left[1+\left(\frac{1}{2}-y\right)^2\right]^{-1}\right)' = -1\cdot\left(1+\left[\frac{1}{2}-y\right]^2\right)^{-2}\cdot 2\left(\frac{1}{2}-y\right)\cdot(-1) \\ &= \frac{1-2y}{\left(1+\left[\frac{1}{2}-y\right]^2\right)^2} \\ \phi''(y) &= \frac{6\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-2}{\left(1+\left[\frac{1}{2}-y\right]^2\right)^3} \end{aligned}$$

Da $6\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-2$ eine Parabel ist, können wir schließen, dass

$$6\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-2<0 \quad \forall y \in [0,1]$$

wenn

$$6\left(0-\frac{1}{2}\right)^2-2<0 \quad \text{und} \quad 6\left(1-\frac{1}{2}\right)^2-2<0.$$

Da $6\left(\frac{1}{2}\right)^2-2=\frac{6}{4}-2=-\frac{1}{2}<0$ folgt ϕ ist konkav auf $[0,1]$

$$\Rightarrow \min_{0\leq y\leq 1}\phi(y) = \min\Big(\phi(0),\phi(1)\Big) = \min\left\{\frac{1}{1+(\frac{1}{2}-0)^2}, \frac{1}{1+(\frac{1}{2}-1)^2}\right\} = \frac{4}{5}$$

Also ist ($\Box$) bewiesen.

($\Box\Box$) Setze ψ wie folgt:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+(x-y)^2}\, dG^*(y) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(x-0)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(x-1)^2} =: \psi(x)$$

Wir wollen zeigen, dass

$$\max_{0\leq x\leq 1}\psi(x) = \frac{4}{5}$$

Um dies zu beweisen, betrachten wir folgenden Ausdruck.

$$
\begin{aligned}
& (2x-2)^2(x^2+(x-1)) \geq 0 \quad \forall x \\
\Leftrightarrow\ & 8x^4 - 16x^3 + 14x^2 - 6x + 1 \geq 0 \quad \forall x \\
\Leftrightarrow\ & 5\left[[1+(x-1)^2] + (1+x^2)\right] \leq 8(1+x^2)\Big(1+(x-1)^2\Big) \quad \forall x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x-1)^2}\right] \leq \frac{4}{5} \quad \forall x \\
\Rightarrow\ & \psi(x) \leq \frac{4}{5} \quad \forall x
\end{aligned}
$$

Da $\psi(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$, können wir schlussfolgern, dass

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \psi(x) = \frac{4}{5}$$

$\Rightarrow F^*$ und G^* sind optimale Strategien.

2.2.2 Punkte des Spektrums

Def. 2.11 (Spektrum eines Spielers)
Sei die gemischte Erweiterung $\hat{\Gamma} = \left\langle P_1, P_2, \hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{H} \right\rangle$ eines Spieles auf dem Einheitsquadrat gegeben. Wir sagen, dass $x^0 \in [0,1]$ zum Spektrum von Spieler P_1 in $\hat{\Gamma}$ gehört, wenn eine optimale (gemischte) Strategie $F^*(x)$ von P_1 existiert, so dass

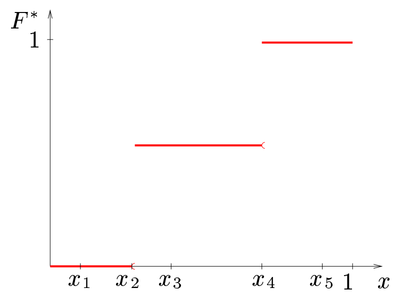
$$\int_{x^0-\varepsilon}^{x^0+\varepsilon} dF^*(x) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad (+)$$

Bemerkung 2.14

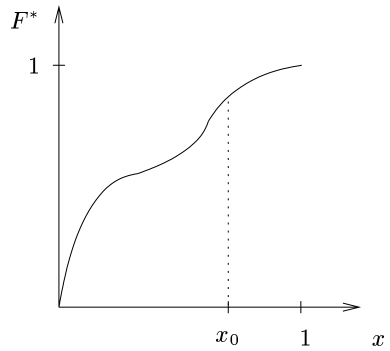
1. Wenn $(+)$ für $\varepsilon_0 > 0$ gilt, dann gilt $(+)$ auch für alle $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ (wegen der Nicht-Fallen Eigenschaft von F^*).

2. Einige Beispiele spektraler Punkte:

   (a) x_1, x_3, x_5 gehören nicht zum Spektrum, wenn F^* die einzige optimale Strategie von P_1 ist, aber x_2, x_4 gehören zum Spektrum, wenn F^* eine optimale Strategie von P_1 ist.



   (b) Im Bild ist x_0 ein Punkt des Spektrums von P_1, wenn F^* eine optimale Strategie von P_1 ist.



3. Sei F^* eine optimale Strategie von P_1 und sei F^* differenzierbar auf $x^0 \in (0,1)$. Dann gilt:

$$x^0 \text{gehört zum Spektrum von } P_1 \iff \frac{d}{dx} F^*(x)/_{x=x^0} > 0.$$

6.1.2003

Satz 2.9 (Generalisierung von Lemma 1.10, S. 23) *Gegeben sei die gemischte Erweiterung* $\hat{\Gamma} = \left\langle P_1, P_2, \hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{H} \right\rangle$ *eines Spieles auf dem Einheitsquadrat. Wir nehmen an, dass eine GGS existiert. Wir bezeichnen mit* $\hat{v}$ *den Wert von* $\hat{\Gamma}$. *Dann gilt Folgendes: Wenn* $H(\cdot, y)$ *stetig auf* $[0,1]$ *für jedes feste* y *ist und* $x^0 \in [0,1]$ *gehört zum Spektrum von* P_1 *in* $\hat{\Gamma}$, *dann*

$$\hat{H}(I_{x^0}, G^*) = \hat{v} \quad \text{für alle optimalen Strategien } G^* \text{ von } P_2$$

(d.h. wenn P_2 *eine optimale Strategie spielt und* P_1 *spielt die reine Strategie* x^0 *(d.h.* P_1 *spielt entsprechend der Verteilungsfunktion* $I_{x^0}(x)$*), dann ist der Gewinn* $\hat{H}(I_{x^0}, G^*)$ *gleich dem Wert des Spieles.)*

Bemerkung 2.15
Analoges gilt für P_2.

Beweis 2.8

- $\hat{\Gamma}$ hat eine GGS (Annahme im Satz) $\Rightarrow$ $\hat{\Gamma}$ hat einen Wert
- Aus der Definition GGS folgt ($[F^*, G^*]$ ist eine GGS):

$$\begin{cases} \hat{H}(F, G^*) \leq \hat{v} & \forall F \in \hat{S}_1 \\ \hat{H}(F^*, G) \geq \hat{v} & \forall G \in \hat{S}_2 \end{cases}$$

- Daraus folgt
$$\hat{H}(I_x, G^*) \leq \hat{v} \quad \forall x \in [0,1] \qquad (+)$$
- Mit $x = x_0$ ergibt sich
$$\hat{H}(I_{x^0}, G^*) \leq \hat{v}$$
Wir müssen beweisen, dass wir hier Gleichheit haben.
- Im Widerspruch zur Aussage des Satzes 2.9 nehmen wir an, dass
$$\hat{H}(I_{x^0}, G^*) < \hat{v} \qquad (++)$$
Wir werden einen Widerspruch aus (++) ableiten.
- $H(x, y)$ ist stetig als Funktion von x.

- Daraus folgt (Beweis ist Übung):

$$\hat{H}(I_x, G^*) = \int_0^1 H(x,y)\, dG^*(y) \text{ ist stetig in Bezug auf } x$$

- Aus (++) schlussfolgern wir: Es existiert ein $\delta > 0$ so, dass für ein $\varepsilon > 0$ gilt

$$\hat{H}(I_x, G^*) \le \hat{v} - \delta \quad \forall x \in [x^0 - \varepsilon, x^0 + \varepsilon] \tag{$\Box$}$$

- Auf der anderen Seite folgt aus der Definition des Wertes eines Spieles:

$$\hat{v} = \hat{H}(F^*, G^*)$$

wobei $[F^*, G^*]$ eine GGS ist und F^* verbunden ist mit der Spektrumeigentschaft, d.h.

$$\int_{x^0-\kappa}^{x^0+\kappa} dF^*(x) > 0 \quad \forall \kappa > 0 \tag{$\triangle$}$$

- Es gilt

$$\begin{aligned}
\hat{v} = \hat{H}(F^*, G^*) &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. von } \hat{H}}}{=} \int_0^1 \int_0^1 H(x,y)\, dG^*(y) dF^*(x) \\
&= \int_{x^0-\varepsilon}^{x^0+\varepsilon} \underbrace{\int_0^1 H(x,y)\, dG^*(y) dF^*(x)}_{=\hat{H}(I_x, G^*)} + \int_{[0,1]\setminus[x^0-\varepsilon, x^0+\varepsilon]} \int_0^1 H(x,y)\, dG^*(y) dF^*(x) \\
&= \int_{x^0-\varepsilon}^{x^0+\varepsilon} \hat{H}(I_x, G^*)\, dF^*(x) + \int_{[0,1]\setminus[x^0-\varepsilon, x^0+\varepsilon]} \hat{H}(I_x, G^*)\, dF^*(x) \\
&\overset{(\Box)}{\le} (\hat{v} - \delta) \int_{x^0-\varepsilon}^{x^0+\varepsilon} dF^*(x) + \int_{[0,1]\setminus[x^0-\varepsilon, x^0+\varepsilon]} \hat{H}(I_x, G^*)\, dF^*(x) \\
&\overset{(+)}{\le} (\hat{v} - \delta) \int_{x^0-\varepsilon}^{x^0+\varepsilon} dF^*(x) + \hat{v} \int_{[0,1]\setminus[x^0-\varepsilon, x^0+\varepsilon]} dF^*(x) \\
&= \hat{v} \int_0^1 dF^*(x) - \delta \int_{x^0-\varepsilon}^{x^0+\varepsilon} dF^*(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eigenschaft} \\ 18}}{=} \hat{v} - \delta \int_{x^0-\varepsilon}^{x^0+\varepsilon} dF^*(x)
\end{aligned}$$

- Daraus folgt

$$\hat{v} \le \hat{v} - \delta \int_{x^0-\varepsilon}^{x^0+\varepsilon} dF^*(x) \quad \Longrightarrow \quad 0 \le -\delta \int_{x^0-\varepsilon}^{x^0+\varepsilon} dF^*(x)$$

Aber das ist ein Widerspruch, da $\delta > 0$ und nach ($\triangle$) $\int_{x^0-\varepsilon}^{x^0+\varepsilon} dF^*(x) > 0$, da x^0 ein Punkt des Spektrums ist.

- D.h. die Annahme (++) führt zum Widerspruch, d.h. mit (+) folgt

$$\hat{H}(I_{x^0}, G^*) = \hat{v}$$

#

Bemerkung 2.16

1. Wenn $H(x,y)$ stetig auf $[0,1] \times [0,1]$ ist, dann hat P_1 mindestens einen Spektrum-Punkt.
2. Aus den Sätzen in Abschnitt 2.2.3 folgt: Wenn die Funktion $H(x,y)$ für ein $y \in [0,1]$ streng konkav auf $[0,1]$ als Funktion von x und stetig auf $[0,1]$ ist, dann hat P_1 genau einen Spektrum-Punkt.
3. Wir können Dominanz in $\hat{\Gamma}$ einführen. Wir können beweisen, dass stark dominierte Strategien nicht zum Spektrum gehören können.
4. Betrachte den Fall
$$H(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i(x) v_j(y)$$
wobei a_{ij} Konstanten sind und die Funktionen $u_i(x), v_j(y)$ sind stetig auf $[0,1]$ (Spiele auf dem Einheitsquadrat mit solch einem H werden *entartete* Spiele genannt). Für solche Spiele gilt das Folgende: P_1 hat höchstens $m+1$ Spektrum-Punkte, P_2 hat höchstens n+1 Spektrum-Punkte.

2.2.3 Konvexe Spiele auf dem Einheitsquadrat

Im Allgemeinen ist das Spiel $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H \rangle$ auf dem Einheitsquadrat nicht in reinen Strategien lösbar. Satz 2.8 sagt, dass in der gemischten Erweiterung $\hat{\Gamma} = \left\langle P_1, P_2, \hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{H} \right\rangle$ das Spiel lösbar ist (wenn H stetig auf $[0,1] \times [0,1]$ ist). Aber wir können zeigen, dass im Fall, dass $H(x,y)$ konvex als eine Funktion von y oder konkav als eine Funktion von x ist, P_2 bzw. P_1 optimale reine Strategien hat.

Satz 2.10 *Wir betrachten das Spiel $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H \rangle$ auf dem Einheitsquadrat. Wir nehmen an, dass für jedes feste $x \in [0,1]$ die Funktion $H(x,y)$ konvex und stetig auf $[0,1]$ als Funktion von y ist. Dann gilt Folgendes in der gemischten Erweiterung $\hat{\Gamma} = \left\langle P_1, P_2, \hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{H} \right\rangle$:*

(i) Es gilt:

$$\underbrace{\sup_{F \in \hat{S}_1} \inf_{G \in \hat{S}_2} \hat{H}(F,G)}_{\underline{\hat{v}}} = \underbrace{\inf_{G \in \hat{S}_2} \sup_{F \in \hat{S}_1} \hat{H}(F,G)}_{\bar{\hat{v}}} \overset{def}{=} \hat{v}$$

d.h. $\hat{\Gamma}$ hat den Wert $\hat{v}$. Aber wir können nicht sagen, dass eine GGS existiert, siehe Satz 2.5.

(ii) Spieler P_2 hat im Spiel $\hat{\Gamma}$ eine reine optimale Strategie. Exakter: Es existiert ein $a \in [0,1]$ so, dass

$$\hat{H}(F, I_a) \leq \hat{v} \quad \forall F \in \hat{S}_1$$

(y:=a ist eine optimale Strategie von P_2).

$$\textit{Dabei ist} \begin{cases} I_a(y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq y < a \\ 1 & a \leq y \leq 1 \end{cases} & \textit{für } a > 0 \\ I_a(y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ 1 & y > 0 \end{cases} & \textit{für } a = 0 \end{cases}$$

(iii) Für ein $\varepsilon > 0$ hat der Spieler P_1 eine ε-optimale Strategie, die eine konvexe Kombination von höchstens zwei reinen Strategien ist. Exakter: Füe ein gegebenes $\varepsilon > 0$ existieren $x^*, x^{**} \in [0,1]$ (x^*, x^{**} hängen im Allgemeinen von ε ab) und $\lambda \in [0,1]$ so, dass für

$$F^*(x) = \lambda I_{x^*}(x) + (1-\lambda) I_{x^{**}}(x)$$

Folgendes gilt:

$$\hat{H}(F^*, G) \geq \hat{v} - \varepsilon \quad \forall G \in \hat{S}_2$$

d.h. F^* ist eine ε-optimale Strategie von P_1 in $\hat{\Gamma}$.

8.1.2003

Bemerkung 2.17

1. Analoges gilt für P_1 in (ii) und für P_2 in (iii), wenn H bezüglich x konkav und stetig ist.
2. Beachte, dass unter den Bedingungen von Satz 2.10 eine GGS nicht existieren muss.
3. Satz 2.10 macht nur Aussagen über die Existenz, er gibt keinen Hinweis, wie man (in der Praxis) die Werte $\hat{v}, a, x^*, x^{**}, \lambda$ berechnen kann. $\Rightarrow$ siehe Satz 2.12

Folgerung 2.11 *Betrachte das Spiel $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H\rangle$ auf dem Einheitsquadrat in reinen Strategien. Angenommen,*

$$\begin{cases} \forall x \in [0,1] \text{ ist die Funktion } \phi_x(y) \underset{x \text{ fest}}{\overset{def}{\underset{\uparrow}{=}}} H(x,y) \text{ konvex und stetig auf } [0,1] \\ \forall y \in [0,1] \text{ ist die Funktion } \psi_y(x) \underset{y \text{ fest}}{\overset{def}{\underset{\uparrow}{=}}} H(x,y) \text{ konkav und stetig auf } [0,1] \end{cases}$$

Dann gilt Folgendes:

(i) Das Spiel hat einen Wert v.

(ii) Beide Spieler P_1 und P_2 haben reine optimale Strategien. (d.h. Γ hat eine GGS in reinen Strategien).

Def. 2.12 (Richtungsableitung)
Sei $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sei $x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}, r \neq 0$. Wir sagen, dass Ψ *richtungsableitbar* im Punkt x^* in die Richtung r ist, wenn

$$\lim_{a \to +0} \frac{\Psi(x^* + \alpha r) - \Psi(x^*)}{\alpha}$$

existiert.
In diesem Fall wird

$$\Psi'(x^*; r) = \lim_{a \to +0} \frac{\Psi(x^* + \alpha r) - \Psi(x^*)}{\alpha}$$

Richtungsableitung von Ψ an x^* in Richtung r genannt.

Bemerkung 2.18

1. Aus der „Konvexen Analysis“ ist bekannt, dass konvexe (konkave) Funktionen richtungsableitbar sind.
2. Wenn Ψ differenzierbar ist (d.h. $\nabla\Psi(x)$ exisitiert), dann existiert die Richtungsableitung von Ψ in alle Richtungen r und es gilt Folgendes:

$$\Psi'(x^*; r) = \langle \nabla\Psi(x^*), r\rangle \qquad (\circ)$$

(d.h. die Richtungsableitung ist der Gradient der Funktion projiziert auf die Richtung r)

3. Betrachten den Fall $n = 1$, d.h. $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wenn Ψ differenzierbar ist, dann ist

$$\Psi'(x^*; r) \underset{(\circ)}{\overset{\uparrow}{=}} \Psi'(x^*) \cdot r$$

wobei $\Psi'(x^*)$ die gewöhnliche erste Ableitung $\frac{d}{dx}\Psi(x) = \Psi'(x)$ ist und $r \in \{-1, +1\}$.

Satz 2.12 *Betrachte das Spiel* $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H\rangle$ *auf dem Einheitsquadrat. Sei* $H(x, \cdot)$ *konvex auf* $[0, 1]$ *für jedes feste* x*. Dann gilt Folgendes:*

(i) $\hat{v} = \min\limits_{0\le y\le 1} \max\limits_{0\le x\le 1} H(x, y)$ *ist der Wert des Spieles* Γ*.*

(ii) P_2 *hat eine reine optimale Strategie* I_{y^*}*, wobei* y^* = *jedes* y*, an dem das Minimum in* (i) *angenommen wird.*

(iii) P_1 *hat eine optimale Strategie im Spiel* $\hat{\Gamma}$*, die die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(a) Wenn $y^* = 0$*, dann ist* $F^*(x) := I_{x^*}(x)$ *eine optimale Strategie von* P_1*, wobei*

$$\begin{cases} x^* \in [0, 1] \\ H(x^*, \underset{y^*}{\underset{\uparrow}{0}}) = \hat{v} \\ \Psi'(\underset{y^*}{\underset{\uparrow}{0}}; \underset{r}{\underset{\uparrow}{+1}}) \ge 0, \text{ wobei } \Psi(y) \overset{def}{=} H(x^*, y) \end{cases}$$

(b) Wenn $y^* = 1$*, dann ist* $F^*(x) := I_{x^{**}}(x)$ *eine optimale Strategie von* P_1*, wobei*

$$\begin{cases} x^{**} \in [0, 1] \\ H(x^{**}, \underset{y^*}{\underset{\uparrow}{1}}) = \hat{v} \\ \hat{\Psi}'(\underset{y^*}{\underset{\uparrow}{1}}; \underset{r}{\underset{\uparrow}{-1}}) \le 0, \text{ wobei } \hat{\Psi}(y) \overset{def}{=} H(x^{**}, y) \end{cases}$$

(c) Wenn $0 < y^* < 1$*, dann ist* $F^*(x) := \alpha I_{x^*}(x) + (1-\alpha) I_{x^{**}}(x)$ *eine optimale Strategie von* P_1 *im Spiel* $\hat{\Gamma}$*, wobei*

$$\begin{cases} 0 \le \alpha \le 1 \\ x^*, x^{**} \in [0, 1] \\ \Psi'(y^*; +1) \ge 0 \\ \hat{\Psi}'(y^*, +1) \le 0 \\ H(x^*, y^*) = \hat{v} \\ H(x^{**}, y^*) = \hat{v} \\ 0 = \alpha\Psi'(y^*; +1) + (1-\alpha)\hat{\Psi}'(y^*; -1), \text{ wobei } & \Psi(y) \overset{def}{=} H(x^*, y) \\ & \hat{\Psi}(y) \overset{def}{=} H(x^{**}, y) \end{cases}$$

Bemerkung 2.19

1. Satz 2.12 ermöglicht es uns, die Werte α, $x^*, x^{**}, y^*, \hat{v}$ (praktisch) zu berechnen.

2. Vergleiche Satz 2.10 und Satz 2.12. Man sieht, dass Satz 2.10 nur eine Existenzbedingung angibt, wogegen Satz 2.12 konstruktiv ist. Außerdem ist in ersterem die Existenz einer GGS nicht garantiert, in letzterem schon.

Beispiel 2.3
Sei $H(x,y) = -2x^2 + y^2 + 3xy - x - 2y$.

- Wir sehen, dass H stetig ist auf $[0,1] \times [0,1]$.
  H ist konvex bezüglich y, da $\frac{\partial H(x,y)}{\partial y^2} = +2 > 0$
  H ist konkav bezüglich x, da $\frac{\partial H(x,y)}{\partial x^2} = -4 < 0$
  Also ist Satz 2.12 anwendbar.

- Das heißt

  $\hat{v} = \min\limits_{0 \le y \le 1} \max\limits_{0 \le x \le 1} H(x,y)$ ist der Wert des Spieles.

  $\Rightarrow$ jedes y, dass das äußere Minimum realisiert, ist eine optimale Strategie von P_2.

  $\hat{v} = \max\limits_{0 \le x \le 1} \min\limits_{0 \le y \le 1} H(x,y)$ ist der Wert des Spieles.

  $\Rightarrow$ jedes x, dass das äußere Maximum realisiert, ist eine optimale Strategie von P_1.

1. Wir wollen $\hat{v}$ berechnen. Setze $\phi(x) = \min\limits_{0 \le y \le 1} H(x,y)$. Dann ist ϕ der optimale Werte des Minimierungsproblems

$$(+)\begin{cases} -2x^2 + y^2 + 3x^2 - x - 2y \to \min\limits_{y} \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

Aus der Vorlesung „Optimierung“ I wissen wir, dass die Bedingungen $(STAT)$ notwendig und hinreichend für die Optimalität im Problem (+) sind. (Hinreichend, weil H konvex bezüglich y ist.) Wir wollen $(STAT)$ hinschreiben.

$$\mathbb{L}(y,\mu,\lambda) = -2x^2 + y^2 + 3xy - x - 2y - \mu(y-0) + \lambda(y-1)$$

Beachte: x ist fest. Dann ist $(STAT)$

$$(STAT)\begin{cases} \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial y} = 0 \\ 0 \le y \le 1 \\ \lambda \ge 0 \\ \mu \ge 0 \\ \mu(y-0) = 0 \\ \lambda(y-1) = 0 \end{cases}$$

Wir wissen: jede Lösung $[y,\mu,\lambda]$ von $(STAT)$ definiert eine optimale Lösung von Problem (+).
In unserem Beispiel ist $(STAT)$ also folgendes Problem

$$(STAT)\begin{cases} 2y + 3x - 2 - \mu + \lambda = 0 & (1) \\ \lambda(y-1) = 0 & (2) \\ \mu y = 0 & (3) \\ 0 \le y \le 1 & (4) \\ \mu \ge 0 & (5) \\ \lambda \ge 0 & (6) \end{cases}$$

2. Wir wollen $(STAT)$ lösen.

   (a) Sei $\lambda > 0$. Dann $\xRightarrow{(2)(3)} y = 1$ und $\mu = 0$. $\Rightarrow 2 + 3x - 2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -3x \Rightarrow \lightning$ zu $0 \le x \le 1$ und $\lambda \ge 0$ (außer im Fall $x = 0$).
   Folgerung: Wenn $\lambda \ge 0$ und $x > 0$, dann $\lambda = 0$.

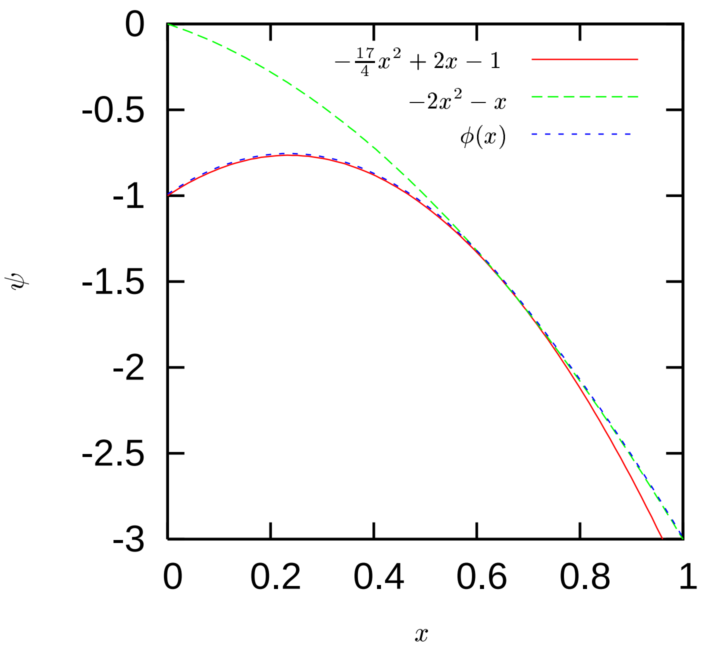
(b) Sei $\lambda = 0$. Angenommen, $y > 0$. $\xrightarrow{(3)} \mu = 0 \Rightarrow 2y + 3x - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{2-3x}{2}$. Da $y \geq 0$, folgern wir, dass $\frac{2-3x}{2} \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}$.
Folgerung: Wenn $x \leq \frac{2}{3}$, dann ist $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $y = 1 - \frac{3}{2}x$ eine Lösung von $(STAT)$.

(c) Sei $\lambda = 0$, $x > \frac{2}{3}$. $\Rightarrow \mu = 0$ ist nicht möglich, da $y = \frac{2-3x}{2} < 0 \lightning\, y \geq 0$. Deswegen gilt unter den Bedingungen $\lambda = 0$, $x > \frac{2}{3} \Rightarrow \mu > 0 \xrightarrow{(3)} y = 0 \Rightarrow 3x - 2 - \mu = 0 \Rightarrow \mu = 3x - 2$ (beachte: für $x > \frac{2}{3}$ gilt $\mu > 0$)
Folgerung: Wenn $\lambda = 0$ und $x > \frac{2}{3}$, dann ist $\lambda = 0$, $\mu = 3x - 2$, $y = 0$ eine Lösung von $(STAT)$.

3. Da die Lösungen von $(STAT)$ mit optimalen Lösungen von Problem (+) verbunden sind, das $\phi(x)$ definiert, gilt

$$\phi(x) = \begin{cases} H(x, \frac{2-3x}{2}) & x \leq \frac{2}{3} \\ H(x, 0) & x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\phi(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. } H(x,y)}}{=} \begin{cases} -\frac{17}{4}x^2 + 2x - 1 & x \leq \frac{2}{3} \\ -2x^2 - x & x > \frac{2}{3} \end{cases}$$



13.1.2003

- $\hat{v} = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} \phi(x) = -\frac{13}{17}$
- Das Maximum wird an der Stelle $x = \frac{4}{17}$ angenommen. Das ist eine optimale Strategie von P_1 im Spiel Γ. Da $\frac{4}{17} \leq \frac{2}{3}$, wird das Minimum in $\max\limits_{0 \leq x \leq 1} \min\limits_{0 \leq y \leq 1} H(x, y)$ für $x = \frac{4}{17}$ angenommen und $y^* = \frac{2-3\frac{4}{17}}{2} = \frac{11}{17}$.
- Wir könnten erwarten, dass $y^* = \frac{11}{17}$ eine optimale Strategie von Spieler P_2 im Spiel Γ ist, dass muss aber nicht zwingend der Fall sein.
- In diesem Fall gilt das jedoch:
Im Allgemeinen ist y^* der Punkt, der das äußere Minimum in der Formel

$$\hat{v} = \min_{0 \leq y \leq 1} \underbrace{\max_{0 \leq x \leq 1} H(x, y)(y)}_{\psi}$$

realisiert.

$$\psi = \begin{cases} H(0,y) & y \leq \frac{1}{3} \\ H(\frac{3y-1}{4},y) & y > \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi(y) \to \min \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad \text{hat die optimale Lösung } y^* = \frac{11}{17}$$

$\Rightarrow y^*$ ist eine optimale Strategie von P_2 in Γ.

3 N-Personen nichtkooperative Spiele

Bis jetzt haben wir nur Konstantsummenspiele in Normalform betrachtet. Jetzt werden wir Spiele in Normalform betrachten, die keine Konstantsummenspiele sein müssen.
Allgemein betrachten wir dabei das Spiel $\Gamma = \langle P_1, P_2, \ldots, P_n, S_1, S_2, \ldots, S_n, H_1, H_2, \ldots, H_n \rangle$. Meistens werden wir uns jedoch auf den Fall $n = 2$, S_1, S_2 sind endliche Mengen, beschränken. Solche Spiele werden *Bimatrixspiele* genannt.
Wir erlauben, dass $H_1(x,y) + H_2(x,y) \neq const.$ $\forall (x,y) \in S_1 \times S_2$ (d.h. Γ muss kein Konstantsummenspiel sein).
Es ist nicht klar, was man unter einer Lösung eines solchen Spieles versteht. Es existieren viele Vorschläge für die Definition einer GGS. D.h. wir werden nicht nur die GGS im Sinne der vergangenen Definition betrachten.

3.1 Vier Beispiele

3.1.1 Dilemma der Arrestanten

Wir haben dies schon in Abschnitt 0.4 betrachtet.

$\boxed{P_1}$

		Spieler 2	
		K	D
Spieler 1	K	-2	-10
	D	-1	-5

$\boxed{P_2}$

		Spieler 2	
		K	D
Spieler 1	K	-2	-1
	D	-10	-5

3.1.2 Kampf der Geschlechter

Ein Ehepaar will am Samstag ausgehen. Der Mann will lieber zum Fußball gehen, die Frau ins Ballett. Wir haben zwei Gewinnmatrizen H_1 für den Mann und H_2 für die Frau. Eine Zeile steht für die Entscheidung des Mannes und die Spalte für die Entscheidung der Frau. Beide haben zwei Möglichekeiten: entweder sie gehen zum Fußball(F) oder zum Ballett (B). Es gibt aber keine Kooperation zwischen den beiden Spielern, sie entscheiden unabhängig voneinander.

$\boxed{P_1}$

		Spieler 2	
		F	B
Spieler 1	F	2	-1
	B	-1	1

$\boxed{P_2}$

		Spieler 2	
		F	B
Spieler 1	F	1	-1
	B	-1	2

3.1.3 Chicken

Zwei amerikanische Teenager treffen sich auf einer einsamen geraden Straße. Sie fahren auf der Mittellinie mit hoher Geschwindigkeit genau aufeinander zu. Der Fahrer, der zuerst ausweicht, ist das „Chicken“. Es gibt für jeden Fahrer zwei mögliche Entscheidungen: weiche zuerst aus (SF) und weiche nicht zuerst aus (DSF). Wir haben die folgenden Gewinne:

$\boxed{P_1}$

		Spieler 2	
		SF	DSF
Spieler 1	SF	3	0
	DSF	5	−10

$\boxed{P_2}$

		Spieler 2	
		SF	DSF
Spieler 1	SF	3	5
	DSF	0	−10

3.1.4 Tarifverhandlungen

Zwei Gewerkschaften G_1 und G_2, die die Belegschaft vertreten, stehen im Wettbewerb um Mitglieder. Sie nehmen beide an Verhandlungen um Lohnabkommen mit dem Arbeitgeber teil. Es werden zwei Modelle diskutiert. In Modell 1 (M_1) steigen die Löhne um 5% und in Modell 2 (M_2) steigen die Löhne um 2% und die Wochenarbeitszeit wird um eine Stunde verkürzt. G_1 bevorzugt das Modell M_1, G_2 bevorzugt M_2. Es gelten die folgenden Regeln:

- Wenn G_1 und G_2 beide für ein Modell plädieren, dann kann der Arbeitgeber diesem nur noch zustimmen.
- Wenn Wenn G_1 und G_2 für jeweils ein anderes Modell kämpfen, dann kann der Arbeitgeber den Gewinn reduzieren (ein Kompromiss muss geschlossen werden).

Die zwei Spieler $P_1(G_1)$ und $P_2(G_2)$ erhalten folgende Gewinne:

$\boxed{P_1}$

		Spieler 2	
		M_1	M_2
Spieler 1	M_1	11	1
	M_2	2	6

$\boxed{P_2}$

		Spieler 2	
		M_1	M_2
Spieler 1	M_1	4	1
	M_2	2	8

Def. 3.1 (Bimatrixspiel)
Sei$\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H_1, H_2 \rangle$ ein nichtkooperatives 2-Personen Spiel in Normalform.
Wenn $card(S_1) < +\infty, card(S_2) < +\infty$, wird das Spiel *Bimatrixspiel* genannt.

Bemerkung 3.1

1. O.B.d.A. können wir annehmen, dass $S_1 = \{1, 2, \ldots, m\}$ und $S_2 = \{1, 2, \ldots, n\}$, wobei $n, m \in \mathbb{N}$. Dann können die Funktionen $H_1, H_2 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ durch zwei Matrizen repräsentiert werden:
$$H_1 = \{a_{ij}\}_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n} \quad H_2 = \{b_{ij}\}_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$$
   - a_{ij} ist der Gewinn von P_1, wenn er die Entscheidung $i \in S_1$ trifft und P_2 die Entscheidung $j \in S_2$.
   - b_{ij} ist der Gewinn von P_2, wenn P_1 die Entscheidung $i \in S_1$ trifft und P_2 die Entscheidung $j \in S_2$.
2. Normalerweise ist in solchen Spielen $a_{ij} + b_{ij}$ keine Konstante, sondern hängt von i und j ab.
3. In Matrixspielen (am Anfang der Vorlesung) galt $b_{ij} = -a_{ij} \Rightarrow a_{ij} + b_{ij} = const.$
4. Alle vier Beispiele sind Nicht-Konstantsummenspiele.

15.1.2003

3.2 Das Lösungskonzept nach Nash

Das Konzept einer GGS wird als Lösungskonzept für antagonistische und Konstantsummenspiele akzeptiert. Aber in Nicht-Konstantsummenspielen in Normalform ist dieses Konzept nur eines der akzeptierten Konzepte. Im Weiteren werden wir dieses Konzept „Nash-Konzept“ nennen.

Def. 3.2 (Gleichgewichtssituation nach Nash)
Sei $\Gamma = \langle P_1, P_2, \dots, P_n, S_1, S_2, \dots, S_n, H_1, H_2, \dots, H_n \rangle$ ein nichtkooperatives Spiel in Normalform. Eine Situation $\sigma^* = [\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*] \in \prod_{i=1}^n S_i$ im Spiel Γ heißt *Gleichgewichtssituation nach Nash* (*Lösung im Sinne von Nash*), wenn σ^* für alle n Spieler akzeptabel ist, d.h.

$$H_i(\sigma^*) \geq H_i(\sigma^*/\sigma_i) \qquad \forall \sigma_i \in S_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

wobei $\sigma^*/\sigma_i = [\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_n]$ mit

$$\hat{\sigma}_j = \begin{cases} \sigma_j^* & j \neq i \\ \sigma_i & j = i \end{cases}$$

Bemerkung 3.2
Sei Γ ein Bimatrixspiel, $H_1 = \{a_{ij}\}_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$, $H_2 = \{b_{ij}\}_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$. Eine GGS nach Nash in einem solchen Spiel ist ein Paar $[i_0, j_0] \in S_1 \times S_2 = \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$, wenn gilt

$$\begin{cases} a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} & \forall i \in S_1 = \{1, 2, \dots, m\} \\ b_{i_0 j} \leq b_{i_0 j_0} & \forall j \in S_2 = \{1, 2, \dots, n\} \end{cases} \tag{$*$}$$

Beispiel 3.1
Wir wollen unsere Beispiele betrachten.

1. **Dilemma der Arrestanten** (Seite 63)
   Die Situation $[i_0, j_0] = [2, 2]$ ist die einzige GGS nach Nash (beide Spieler gestehen). Warum? Wir müssen zeigen, dass $(*)$ gilt. Wir müssen zeigen

   $$\begin{cases} a_{12} \leq a_{22} & \Leftrightarrow -10 \leq -5 \text{ wahr} \\ a_{22} \leq a_{22} & \text{wahr} \\ b_{21} \leq b_{22} & \Leftrightarrow -10 \leq -5 \text{ wahr} \\ b_{22} \leq b_{22} & \text{wahr} \end{cases}$$

   Man kann zeigen, dass es keine andere Kombination von $[i_0, j_0]$ $(*)$ erfüllt, betrachte z.B. den Fall $[i_0, j_0] = [1, 2]$. In diesem Fall heißt $(*)$:

   $$\begin{cases} a_{12} \leq a_{12} & \text{wahr} \\ a_{22} \leq a_{12} & \Leftrightarrow -5 \leq -10 \text{ falsch} \\ b_{11} \leq b_{12} & \Leftrightarrow -2 \leq -1 \text{ wahr} \\ b_{12} \leq b_{12} & \text{wahr} \end{cases}$$

   $\Rightarrow$ $(*)$ gilt nicht $\Rightarrow$ $[1, 2]$ ist keine Lösung nach Nash.

2. **Kampf der Geschlechter** (Seite 63)
   $[1, 1]$ und $[2, 2]$ sind Lösungen nach Nash (beide gehen zum Fußball oder beide gehen zum Ballett).

3. **Chicken** (Seite 63)
   $[1, 2]$ und $[2, 1]$ sind Lösungen nach Nash (nur einer der beiden Fahrer weicht von der Mittellinie ab).

4. **Tarifverhandlungen** (Seite 64)
   $[1, 1]$ und $[2, 2]$ sind Lösungen nach Nash (beide Gewerkschaften entscheiden sich für dasselbe Modell).

Einige Worte über Vorteile und Nachteile dieser Lösungen

- Wir dürfen nicht vergessen, dass beide Spieler ihre Entscheidungen unabhängig voneinander treffen (keine Kooperation). Nur im Dilemma der Arrestanten erhalten wir diesselbe Lösung mit der Definition nach Nash und unter Verwendung der konservativen Zugangs (max-min Prinzips):
  P_1 wählt ein i_0, welches das Maximum in $\max_i \min_j a_{ij}$ realisiert und P_2 wählt ein j_0, welches das Maximum in $\max_j \min_i b_{ij}$ realisiert (sogenannte worst-case Analyse). Aber in den anderen drei Beispielen führt dieser Ansatz nicht zu Lösungen nach Nash. Betrachten wir z.B. den Kampf der Geschlechter:

  $$\min_j a_{ij} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \max_i \min_j a_{ij} = -1 \Rightarrow i_0 = 1,2 \text{ sind beides mögliche Entscheidungen}$$
  $$\min_i b_{ij} = (-1,-1) \quad \Rightarrow \max_j \min_i b_{ij} = -1 \Rightarrow j_0 = 1,2 \text{ sind beides mögliche Entscheidungen}$$

  $\Rightarrow$ $[1,1]$, $[1,2]$, $[2,1]$, $[2,2]$ sind alle möglichen Kombination, die es mit den individuellen Entscheidungen gibt. Aber nur $[1,1]$ und $[2,2]$ sind Lösungen nach Nash (ohne Kooperation).
  $\Rightarrow$ Nachteil vom Konzept nach Nash.

- Die Vorteile 2 bis 5 der Lösung nach Nash in antagoistischen Spielen müssen in nicht-antagonistischen Spielen nicht für die Lösung nach Nash gelten (siehe Beispiele):
  Vorteile des Nash-Konzeptes in antagonistischen Spielen:

  1. Stabilität: Es gibt keinen Grund, warum ein Spieler individuell von der GGS abweichen sollte (kein Vorteil für ihn).
  2. Rechteckeigenschaft
  3. Kooperation und Verständigung können den Gewinn für beide Spieler nicht erhöhen.
  4. Wenn beide Spieler von der GGS abweichen, ist es unmöglich, dass beide davon profitieren.
  5. Der pessimistische Ansatz: Beide Spieler spielen ihre max min Strategie ihrer Gewinnfunktion und dies führt zu einer GGS.

- Es gibt eine Klasse von Spielen, bei der die Lösung nach Nash eine gute Lösung ist (siehe folgende Definition).

Def. 3.3 (starke Lösung nach Nash)
Sei $\Gamma = \langle P_1, P_2, \ldots, P_n, S_1, S_2, \ldots, S_n, H_1, H_2, \ldots, H_n \rangle$ ein nichtkooperatives n-Personen Spiel in Normalform. Die Situation $\sigma^* = [\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*] \in \prod_{i=1}^n S_i$ wird *starke Lösung nach Nash* in Γ genannt, wenn $\forall K \subset \{1,2,\ldots,n\}$ gilt

$$\sum_{i\in K} H_i(\sigma^*) \geq \sum_{i\in K} H_i(\sigma^*/\sigma_k) \quad \forall \sigma_k \in \prod_{i\in K} S_i \tag{$\triangle$}$$

wobei $\sigma^*/\sigma_k = [\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \ldots, \hat{\sigma}_n]$ mit

$$\hat{\sigma}_i = \begin{cases} \sigma_i^* & i \notin K \\ \sigma_i & i \in K \end{cases}$$

Bemerkung 3.3

1. Eine starke Lösung nach Nash ist auch eine Lösung nach Nash (betrachte $card(K) = 1$).
2. Wenn eine Lösung nach Nash eine starke Lösung nach Nash ist, dann hat es in diesem Spiel keinen Sinn, Koalitionen zu bilden.

Es macht Sinn, ein Koalition K zu bilden (einige Spieler verständigen sich über ihr Verhalten im Spiel), wenn das System (+) eine Lösung $\hat{\sigma}_k$ besitzt, wobei σ^* die Lösung nach Nash ist:

$$\begin{cases} H_i(\sigma^*/\sigma_k) \geq H_i(\sigma^*) \quad \sigma_k \in \prod_{i=1}^{n} S_i \\ \text{mindestens eine Ungleichung ist eine echte Ungleichung} \end{cases} \tag{+}$$

Das heißt

$$\sum_{i\in K} H_i(\sigma^*/\hat{\sigma}_k) > \sum_{i\in K} H_i(\sigma^*)$$

$\Rightarrow$ Die Koalition kann in der Situation $\sigma^*/\hat{\sigma}_k$ mehr zwischen ihren Mitgliedern aufteilen als in der Situation σ^*.
Aus (+) folgt:

$$\sum_{i\in K} H_i(\sigma^*/\hat{\sigma}_k) > \sum_{i\in K} H_i(\sigma^*)$$

Aus der Definition einer starken Lösung nach Nash folgt:

$$\sum_{i\in K} H_i(\sigma^*) \geq \sum_{i\in K} H_i(\sigma^*/\hat{\sigma}_k)$$

Das ist ein Widerspruch. Wenn die Lösung nach Nash stark ist, dann hat (+) für kein K eine Lösung $\hat{\sigma}_k$, d.h. es macht keinen Sinn, Koalitionen zu bilden.

3. Leider sind in vielen Spielen die Lösungen nach Nash nicht stark. Betrachte unsere Beispiele:
   - Dilemma der Arrestanten: Lösung nicht stark
   - Kampf der Geschlechter: beide Lösungen stark
   - Chicken: Lösungen nicht stark
   - Tarifverhandlungen: Lösung $[1,1]$ ist stark

   Warum ist $[1,1]$ in Beispiel Tarifverhandlungen stark?
   $\sigma^* = [1,1]$ ist eine Lösung nach Nash $\Rightarrow$ ($\triangle$) gilt für $K=\{1\}$ und $K=\{2\}$ (nach Definition einer Lösung nach Nash). Also müssen wir die Ungleichungen ($\triangle$) für K mit $card(K) > 1$ zeigen.$\Rightarrow$ wir müssen sie nur für $K=\{1,2\}$ zeigen. Also

$$H_1(\sigma^*) + H_2(\sigma^*) \geq H_1(\sigma^*/\sigma_k) + H_2(\sigma^*/\sigma_k) \quad \forall \sigma_k \in \{1,2\}\times\{1,2\}$$

   ist zu zeigen. Aber das gilt, denn

$$\begin{cases} 11+4 \geq 11+4 & \sigma_k = [1,1] \\ 11+4 \geq 1+1 & \sigma_k = [1,2] \\ 11+4 \geq 2+2 & \sigma_k = [2,1] \\ 11+4 \geq 6+8 & \sigma_k = [2,2] \end{cases}$$

   $\Rightarrow \sigma^* = [1,1]$ ist eine starke Lösung nach Nash.

20.1.2003

3.3 Das Lösungskonzept von Pareto

Def. 3.4 (Pareto-Lösung)
Wir betrachten wieder ein n-Personen Spiel in Normalform
$\Gamma = \langle P_1, P_2, \ldots, P_n, S_1, S_2, \ldots, S_n, H_1, H_2, \ldots, H_n \rangle$.
Eine Situation $\sigma^* = [\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*] \in \prod_{i=1}^n S_i$ wird *Pareto-Lösung* genannt, wenn das System ($\triangle$) keine Lösung hat.

$$\begin{cases} \sigma \in \prod_{i=1}^n S_i \\ H_i(\sigma) \geq H_i(\sigma^*) & \forall i \in \{1,\ldots,n\} \\ \text{wenigstens eine der n Ungleichungen ist eine echte Ungleichung} \end{cases} \tag{$\triangle$}$$

Bemerkung 3.4
Was heißt Lösung nach Pareto in einem Bimatrixspiel?
$H_1 = \{a_{ij}\}_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}, H_2 = \{b_{ij}\}_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$. $\sigma^* = [i_0, j_0]$ ist eine Pareto-Lösung, wenn das System $(\triangle\triangle)$ abgeleitet aus dem System $(\triangle)$ keine Lösung hat

$$\begin{cases} \exists [i,j] \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\} \\ a_{ij} \geq a_{i_o j_0} \\ b_{ij} \geq b_{i_o j_0} \\ \text{wenigstens eine der zwei Ungleichungen ist echt} \end{cases} \qquad (\triangle\triangle)$$

Beispiel 3.2
Wir wollen unsere Beispiele betrachten.

1. **Dilemma der Arrestanten** (Seite 63)
   Die Situationen $[i_0, j_0] = [1,1]$, $[i_0, j_0] = [1,2]$ und $[i_0, j_0] = [2,1]$ sind Pareto-Lösungen.

2. **Kampf der Geschlechter** (Seite 63)
   Die Situationen $[i_0, j_0] = [1,1]$ und$[i_0, j_0] = [2,2]$ sind Pareto-Lösungen.

3. **Chicken** (Seite 63)
   Die Situationen $[i_0, j_0] = [1,1]$, $[i_0, j_0] = [1,2]$ und $[i_0, j_0] = [2,1]$ sind Pareto-Lösungen.
   $[i_0, j_0] = [1,1]$ ist eine Pareto-Lösung, weil

$$\begin{cases} \exists [i,j] \in \{1,2\} \times \{1,2\} \\ a_{ij} \geq a_{11} = 3 \\ b_{ij} \geq b_{11} = 2 \\ \text{wenigstens eine der zwei Ungleichungen ist echt} \end{cases} \qquad (\diamond)$$

   keine Lösung haben sollte.
   - Fall $[i,j] = [1,2]$: $0 \geq 3, 5 \geq 3$ ↯
   - Fall $[i,j] = [2,1]$: $5 \geq 3, 0 \geq 3$ ↯
   - Fall $[i,j] = [2,2]$: $-10 \geq 3, -10 \geq 3$ ↯
   - Fall $[i,j] = [1,1]$: $3 \geq 3, 3 \geq 3$ ↯ (keine echte Ungleichung)

   Aber $[i,j] = [2,2]$ ist keine Pareto-Lösung, da

$$\begin{cases} \exists [i,j] \in \{1,2\} \times \{1,2\} \\ a_{ij} \geq a_{22} = -10 \\ b_{ij} \geq b_{22} = -10 \\ \text{wenigstens eine der zwei Ungleichungen ist stark} \end{cases} \qquad (\diamond\diamond)$$

   die Lösung $[1,2]$ hat $\Rightarrow$ $[2,2]$ kann keine Pareto-Lösung sein.

4. **Tarifverhandlungen** (Seite 64)
   Die Situationen $[i_0, j_0] = [1,1]$ und $[i_0, j_0] = [2,2]$ sind Pareto-Lösungen.

Nachteil
Gewöhnlich besitzt die Menge von Pareto-Lösungen sehr viele Elemente.

Proposition 3.1 *Wenn $\sigma^* \in \prod_{i=1}^{n} S_i$ eine Lösung nach Nash im Spiel*

$$\Gamma = \langle P_1, P_2, \dots, P_n, S_1, S_2, \dots, S_n, H_1, H_2, \dots, H_n \rangle$$

ist und σ^* eine starke Lösung nach Nash ist, dann ist σ^* auch eine Pareto-Lösung.

Beweis 3.1
Wir müssen beweisen, dass das System $(\triangle)$ keine Lösung hat. Angenommen, σ^* ist keine Pareto-Lösung, d.h. $(\triangle)$ hat eine Lösung $\hat{\sigma}$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_i(\hat{\sigma}) \geq H_i(\sigma^*) \quad \forall i \\ \text{wenigstens eine der zwei Ungleichungen ist echt} \end{cases}$$

D.h.

$$\sum_{i=1}^{n} H_i(\hat{\sigma}) > \sum_{i=1}^{n} H_i(\sigma^*) \tag{$\circ$}$$

Andererseits ist σ^* stark. Aus der Definition einer starken Lösung nach Nash folgt $\forall K \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\sum_{i \in K} H_i(\sigma^*) \geq \sum_{i \in K} H_i(\sigma^*/\sigma_k) \tag{$*$}$$

Für K={1,...,n} gilt $(\sigma^*/\sigma_k) = \sigma_k \xRightarrow[\sigma_k = \hat{\sigma} \in \prod_{i \in K} S_i]{} (\sigma^*/\hat{\sigma}) = \hat{\sigma}$

Aus $(*)$ folgt somit

$$\sum_{i \in K} H_i(\sigma^*) \geq \sum_{i \in K} H_i(\hat{\sigma})$$

Für dieses K={1,...,n} ergibt sich somit

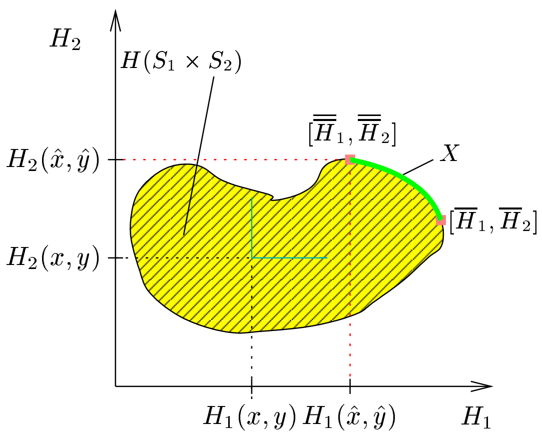
$$\sum_{i=1}^{n} H_i(\sigma^*) \geq \sum_{i=1}^{n} H_i(\hat{\sigma}) \quad \lightning \text{ zu } (\circ)$$

$\Rightarrow$ $\hat{\sigma}$ kann nicht existieren $\Rightarrow$ σ^* ist eine Pareto-Lösung.

#

Einige Fakten für stetige nicht-kooperative Spiele und Pareto-Lösungen
Sei $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H_1, H_2 \rangle$ gegeben, wobei S_1 und S_2 unendliche Mengen sind, z.B. $S_1 = S_2 = [0, 1]$. Betrachte die Abbildung

$$H(x, y) = [H_1(x, y), H_2(x, y)], \text{ wobei } [x, y] \in S_1 \times S_2$$



- $\sigma = [\hat{x}, \hat{y}]$ ist eine Lösung von $(\triangle)$ für $\sigma^* = [x, y]$, da $H_1(\sigma) > H_1(\sigma^*)$ und $H_2(\sigma) > H_2(\sigma^*)$

$\Rightarrow$ σ^* kann keine Pareto-Lösung sein.

- Aber wenn $[H_1, H_2]$ aus dem grünen Randbereich X ist, dann hat das System $(\triangle)$ keine Lösung.

- d.h. alle Punkte $[x,y] \in S_1 \times S_2$ mit $H_1(x,y) = H_1$ und $H_2(x,y) = H_2$ sind Pareto-Lösungen
- $\Rightarrow$ es gibt viele Pareto-Lösungen

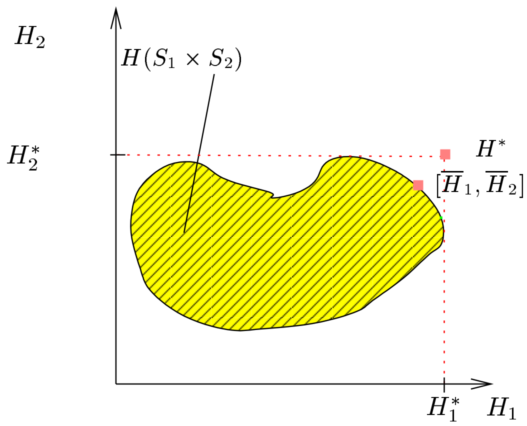
Des Weiteren ist es schwierig, sich vorzustellen, wie die Spieler eine Lösung finden sollen, die in der grünen Menge X liegt.

- P_1 kann X berechnen:
  Der beste Punkt in dieser Menge für P_1 ist der Punkt $[\overline{H}_1, \overline{H}_2] \Rightarrow P_1$ bevorzugt den Punkt $[\overline{x}, \overline{y}]$ mit $H_1[\overline{x}, \overline{y}] = \overline{H}_1$.
- P_2 kann X berechnen:
  Der beste Punkt in dieser Menge für P_2 ist der Punkt $[\overline{\overline{H}}_1, \overline{\overline{H}}_2] \Rightarrow P_2$ bevorzugt den Punkt $[\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}]$ mit $H_2[\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}] = \overline{\overline{H}}_2$.
- P_1 wählt x, P_2 wählt y, P_1 ist interessiert, $x = \overline{x}$, P_2 ist interessiert, $y = \overline{\overline{y}}$ zu wählen.
- Wir erhalten die Situation $[\overline{x}, \overline{\overline{y}}]$, $H(\overline{x}, \overline{\overline{y}}]$ gehört zur schraffierten Menge, aber i.allg. ist $[\overline{x}, \overline{\overline{y}}]$ keine Pareto-Lösung.

Zwei Konzepte

Wir wollen zwei Konzepte betrachten, wie die Spieler sich auf eine Pareto-Lösung einigen können.

1. Konzept des idealen Punktes



Berechne

$$H_1^* = \sup(H_1(x,y) : [x,y] \in S_1 \times S_2)$$
$$H_2^* = \sup(H_2(x,y) : [x,y] \in S_1 \times S_2)$$

Betrachte den idealen Punkt $H^* = [H_1^*, H_2^*]$. Dann gilt die folgende Proposition.

Proposition 3.2 *Sei $[x^*, y^*]$ eine Lösung des Problems*

$$\min \left\{ \left(H_1(x,y) - H_1^*\right)^2 + \left(H_2(x,y) - H_2^*\right)^2 : [x,y] \in S_1 \times S_2 \right\}$$

(im Bild: $H_1(x^*, y^*) = \overline{H}_1$ und $H_2(x^*, y^*) = \overline{H}_2$).
Wenn $H(S_1 \times S_2)$ konvex und abgeschlossen ist, dann existiert $[x^*, y^*]$ und ist eine Pareto-Lösung.

Bemerkung 3.5
Es ist nicht klar, wie P_1 und P_2 mit individuellen Entscheidungen zu $[x^*, y^*]$ gelangen können.

2. Konzept der Skalarisierung
   Angenommen, die Gewichte $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$ sind fest. Betrachte das Problem

$$\max \{\lambda_1 H_1(x,y) + \lambda_2 H_2(x,y) : [x,y] \in S_1 \times S_2\} \qquad (\square)$$

Angenommen, $[x^*, y^*]$ ist eine Lösung von $(\square)$. Dann gilt folgende Proposition.

Proposition 3.3 *Sei wieder $H(S_1 \times S_2)$ konvex. Dann ist die Lösung $[x^*, y^*]$ von ($\square$) eine Pareto-Lösung von $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H_1, H_2 \rangle$.*

Bemerkung 3.6
Es ist wiederum unklar, wie P_1 und P_2 mit individuellen Entscheidungen zu $[x^*, y^*]$ gelangen können.

22.1.2003

3.4 Das konservative Lösungskonzept

Sei $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H_1, H_2 \rangle$. Wir haben

$$v_1 = \max_{x \in S_1} \inf_{y \in S_2} H_1(x, y)$$
$$v_2 = \max_{y \in S_2} \inf_{x \in S_1} H_2(x, y)$$

eingeführt. Wenn x^* das Maximum in v_1 und y^* das Maximum in v_2 realisiert, dann ist x^* in gewissem Sinne (bei vorsichtigem Verhalten von P_1) eine gute Entscheidung von P_1. (analoges gilt für P_2).

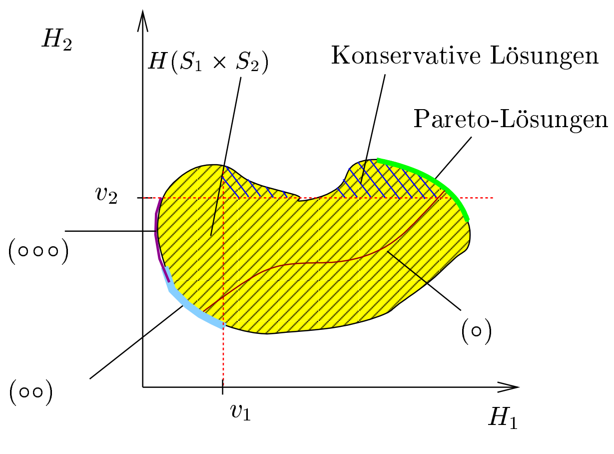
Def. 3.5 (Konservative Lösung)
Sei das 2-Personen Spiel $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H_1, H_2 \rangle$ gegeben, v_1 und v_2 sollen angenommen werden. Dann wird eine Situation $[\overline{x}, \overline{y}] \in S_1 \times S_2$ mit den folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} H_1(\overline{x}, \overline{y}) &\geq v_1 \\ H_2(\overline{x}, \overline{y}) &\geq v_2 \end{aligned} \qquad (\square\square)$$

eine *Lösung im konservativen Sinne (konservative Lösung)* genannt.

Bemerkung 3.7

1. x^* und y^* wie oben bilden eine konservative Lösung.
2. Ein Nachteil dieses Konzeptes ist, dass eine konservative Lösung keine Pareto-Lösung sein muss. Siehe z.B. Dilemma der Gefangenen: $[2, 2]$ ist eine konservative Lösung aber keine Pareto-Lösung.



wobei

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \max_{x \in S_1} \inf_{y \in S_2} H_1(x,y) \\
v_2 &= \max_{y \in S_2} \inf_{x \in S_1} H_2(x,y) \\
(\circ) &- \left[H_1\left(x, y(x)\right), H_2\left(x, y(x)\right)\right], \text{ wobei } y(x) \min_y H_1(x,y) \text{realisiert.} \\
(\circ\circ) &- \text{Menge von Punkten } [x, y(x)] \text{ mit kleinstem } H_1\text{-Wert für alle } x \\
(\circ\circ\circ) &- \text{Menge von Punkten } [x(y), y] \text{ mit kleinstem } H_2\text{-Wert für alle } y
\end{aligned}
$$

Beispiel 3.3
Wir wollen unsere Beispiele betrachten.

1. **Dilemma der Arrestanten** (Seite 63)
   Die Situationen $[i_0, j_0] = [1,1]$ und $[i_0, j_0] = [2,2]$ sind konservative Lösungen.

$$
\begin{aligned}
\min_j a_{ij} &= \begin{cases} -10 & i = 1 \\ -5 & i = 2 \end{cases} \\
v_1 = \max_i \inf_i a_{ij} &= -5 \qquad x^* = i^* = 2 \\
\min_j b_{ij} &= \begin{cases} -10 & i = 1 \\ -5 & i = 2 \end{cases} \\
v_1 = \max_j \inf_i b_{ij} &= -5 \qquad y^* = j^* = 2
\end{aligned}
$$

   Jedes $[i,j] \in S_1 \times S_2$, mit

$$
\begin{aligned}
a_{ij} &\geq -5 = v_1 \\
b_{ij} &\geq -5 = v_2
\end{aligned}
$$

   ist eine konservative Lösung.
   $[i_0, j_0] = [1,1]$ und $[i_0, j_0] = [2,2]$ sind konservative Lösungen.

2. **Kampf der Geschlechter** (Seite 63)
   Die Situationen $[i_0, j_0] = [1,1]$, $[i_0, j_0] = [1,2]$, $[i_0, j_0] = [2,1]$ und $[i_0, j_0] = [2,2]$ sind konservative Lösungen.

3. **Chicken** (Seite 63)
   Die Situationen $[i_0, j_0] = [1,1]$, $[i_0, j_0] = [1,2]$ und $[i_0, j_0] = [2,1]$ sind konservative Lösungen.

4. **Tarifverhandlungen** (Seite 64)
   Die Situationen $[i_0, j_0] = [1,1]$, $[i_0, j_0] = [2,1]$ und $[i_0, j_0] = [2,2]$ sind konservative Lösungen.

3.5 Das Lösungskonzept von Stackelberg

Betrachte das Spiel $\Gamma = \langle P_1, P_2, S_1, S_2, H_1, H_2 \rangle$ in Normalform.

$$
\begin{aligned}
Z^1 &= \left\{ [x,y] \in S_1 \times S_2 : H_1(x,y) = \max_{w \in S_1} H_1(w,y) \right\} \\
&\quad - \text{die Menge der besten Antworten von } P_1 \\
Z^2 &= \left\{ [x,y] \in S_1 \times S_2 : H_2(x,y) = \max_{z \in S_2} H_2(x,z) \right\} \\
&\quad - \text{die Menge der besten Antworten von } P_2
\end{aligned}
\qquad (\square)
$$

Wenn $[x,y] \in Z^1$, dann ist x die beste Reaktion von P_1 auf die Entscheidung y von P_2.

Def. 3.6 (Stackelberg-Lösung)
Wir nennen eine Situtaion $[x^*, y^*] \in S_1 \times S_2$ eine *Stackelberg-P_1-Lösung* von Γ, wenn

$$[x^*, y^*] \in Z^2 \text{ und } H_1(x^*, y^*) = \max_{[x,y]\in Z^2} H_1(x, y)$$

Wir nennen eine Situtaion $[\overline{x}^*, \overline{y}^*] \in S_1 \times S_2$ eine *Stackelberg-P_2-Lösung* von Γ, wenn

$$[\overline{x}^*, \overline{y}^*] \in Z^1 \text{ und } H_2(\overline{x}^*, \overline{y}^*) = \max_{[x,y]\in Z^1} H_2(x, y)$$

Bemerkung 3.8
Interpretation der Stackelberg-P_1-Lösung: P_1 kennt die Menge Z^2 der besten Anworten von P_2 zu seinen möglichen Entscheidungen. Er sucht nach dem für ihn besten Punkt (Maximum von H_1) in der Menge Z^2. $\Rightarrow$ x^* ist seine Stackelberg-P_1-Lösung . Dieses Konzept ist gut, wenn P_1 der Führer ist (er trifft seine Entscheidungen zuerst und gibt sie dann P_2 bekannt). P_2 ist der Gefolgsmann/Anhänger: In einer solchen Situation ist y^* die beste Antwort von P_2.

Beispiel 3.4
Wir wollen unsere Beispiele betrachten.

1. **Dilemma der Arrestanten** (Seite 63)
   Die Situationen $[i_0, j_0] = [2, 2]$ ist Stackelberg-P_1-Lösung.
   Die Situationen $[i_0, j_0] = [2, 2]$ ist Stackelberg-P_2-Lösung.
2. **Kampf der Geschlechter** (Seite 63)
   Die Situationen $[i_0, j_0] = [1, 1]$ ist Stackelberg-P_1-Lösung.
   Die Situationen $[i_0, j_0] = [2, 2]$ ist Stackelberg-P_2-Lösung.
3. **Chicken** (Seite 63)
   Die Situationen $[i_0, j_0] = [2, 1]$ ist Stackelberg-P_1-Lösung.
   Die Situationen $[i_0, j_0] = [1, 2]$ ist Stackelberg-P_2-Lösung.
4. **Tarifverhandlungen** (Seite 64)

   $$Z^1 = \{[1, 1], [2, 2]\} \quad Z^2 = \{[1, 1], [2, 2]\}$$

   Die Stackelberg-P_1-Lösung ist der beste H_1-Wert der Elemente von Z_2.
   Die Situationen $[i_0, j_0] = [1, 1]$ ist Stackelberg-P_1-Lösung.
   Die Situationen $[i_0, j_0] = [2, 2]$ ist Stackelberg-P_2-Lösung.

An den Beispielen sieht man nach Berechnung von Z^1 und Z^2 für jedes Beispiel, dass $Z^1 \cap Z^2$ die Menge der Lösungen nach Nash ist.

Folgerung 3.4 *Betrachte ein 2-Personen-Spiel in Normalform. Sei Z die Menge der Lösungen nach Nash. Seien Z^1 und Z^2 definiert wie unter ($\square$). Dann gilt*

$$Z = Z^1 \cap Z^2$$

Beweis 3.2
$\subset$: Wir wollen $Z \subset Z^1 \cap Z^2$ zeigen. Angenommen, $\sigma^* = [x^*, y^*] \in S_1 \times S_2$ liegt in Z.

$$\xRightarrow[\text{nach Nash}]{\text{Def.Lösung}} \begin{cases} H_1(\sigma^*) \geq H_1(\sigma_1, \sigma_2^*) & \forall \sigma_1 \in S_1 \\ H_2(\sigma^*) \geq H_2(\sigma_1^*, \sigma_2) & \forall \sigma_2 \in S_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1(\sigma^*) = \max\limits_{\sigma_1 \in S_1} H_1(\sigma_1, \sigma_2^*) \\ H_2(\sigma^*) = \max\limits_{\sigma_2 \in S_2} H_2(\sigma_1^*, \sigma_2) \end{cases}$$

$$\xRightarrow[\text{Def. } Z^1, Z^2]{} \begin{cases} \sigma* \in Z^1 \\ \sigma* \in Z^2 \end{cases} \Rightarrow \sigma* \in Z^1 \cap Z^2$$

$\supset$: Ausgehend vom Ende der obigen Schlussfolgerungskette, kann man $Z \supset Z^1 \cap Z^2$ zeigen.

#

Def. 3.7 (Führung)
Seien σ^* eine Stackelberg-P_1-Lösung und σ^{**} eine Stackelberg-P_2-Lösung . Wir sagen, das Spiel Γ ist verbunden mit einem Wettbewerb um die Führung, wenn das System

$$\begin{cases} H_1(\sigma^*) \leq H_1(\sigma) \\ H_2(\sigma^{**}) \leq H_2(\sigma) \\ \sigma \in S_1 \times S_2 \end{cases} \qquad (\nabla)$$

keine Lösung hat.

Bemerkung 3.9

1. Wenn $\sigma^* = \sigma^{**}$, dann ist $\overline{\sigma} = \sigma^* = \sigma^{**}$ eine Lösung von (∇) und es tritt kein Wettbewerb um die Führung auf.

2. Im Beispiel **Tarifverhandlungen** (Seite 64) tritt Wettbewerb um die Führung auf. Das System (∇) ist das folgende:

$$\begin{cases} H_1(\sigma^*) = 11 \leq a_{ij} \\ H_2(\sigma^{**}) = 8 \leq b_{ij} \\ [i,j] \in \{1,2\} \times \{1,2\} \end{cases}$$

Dieses System hat keine Lösung.

Satz 3.5 *Sei Γ ein 2-Personen-Spiel in Normalform. Seien σ^* und σ^{**} Situationen in Γ mit folgenden Eigenschaften*

$$\begin{cases} \sigma^*, \sigma^{**} \text{ sind Lösungen nach Nash} \\ \sigma^*, \sigma^{**} \text{ sind Pareto-Lösungen} \\ \big[H_1(\sigma^*), H_2(\sigma^*)\big] \neq \big[H_1(\sigma^{**}), H_2(\sigma^{**})\big] \end{cases}$$

Dann tritt in Γ Wettbewerb um die Führung auf.

5.2.2003

3.6 Lösung von Bimatrixspielen

Sei $\hat{\Gamma} = \left\langle P_1, P_2, \hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{H}_1, \hat{H}_2 \right\rangle$ die gemischte Erweiterung eines Bimatrixspiels.

$$\begin{aligned} \hat{S}_1 &= \{x \in \mathbb{R}^m : x \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^m x_i = 1\} \\ \hat{S}_2 &= \{y \in \mathbb{R}^n : y \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^n y_i = 1\} \\ \hat{H}_1 &= \langle x, H_1 y \rangle \qquad \text{mit } H_1 = \{a_{ij}\}_{i=1}^m{}_{j=1}^n \\ \hat{H}_2 &= \langle x, H_2 y \rangle \qquad \text{mit } H_2 = \{b_{ij}\}_{i=1}^m{}_{j=1}^n \end{aligned}$$

Betrachte das Lösungskonzept nach Nash. Ein Paar $[x^*, y^*] \in \hat{S}_1 \times \hat{S}_2$ ist eine Lösung nach Nash, wenn

$$\begin{cases} \langle x^*, H_1 y^* \rangle \geq \langle x, H_1 y^* \rangle & \forall x \in \hat{S}_1 \\ \langle x^*, H_2 y^* \rangle \geq \langle x^*, H_2 y \rangle & \forall y \in \hat{S}_2 \end{cases} \qquad (\circ)$$

Lemma 3.6 *$[x^*, y^*] \in \hat{S}_1 \times \hat{S}_2$ ist eine Lösung nach Nash in $\hat{\Gamma} \iff \exists p, q \in \mathbb{R}$ so, dass*

$$\begin{cases} H_1 y^* \leq p \cdot e \\ x^* H_2 \leq q \cdot e \\ \langle x^*, (H_1 + H_2) y^* \rangle = p + q \\ \text{wobei } e = (1, 1, \ldots, 1)^\tau \end{cases} \tag{$\square$}$$

Beweis 3.3

$\Rightarrow$:
- Sei $[x^*, y^*]$ eine Lösung nach Nash. D.h. ($\circ$) gilt. Wir setzen

$$p := \langle x^*, H_1 y^* \rangle$$
$$q := \langle x^*, H_2 y^* \rangle$$

$\Rightarrow$ die dritte Zeile in ($\square$) gilt.
- Setzen wir in ($\circ$) $x = e^i = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0] \in \mathbb{R}^m$, erhalten wir

$$\left\langle h_1^i, y^* \right\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aus } (\circ)}}{\leq} \langle x^*, H_1 y^* \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. von } p}}{=} p \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

wobei h_1^i die i-te Zeile in H_1 ist.

$\Rightarrow$ $H_1 y^* \leq p \cdot e \Rightarrow$ Die erste Zeile in ($\square$) gilt.
- In ähnlicher Weise zeigt man, dass die zweite Ziele in ($\square$) gilt.
(Setze $y = e^j$ $j \in \{1, \ldots, n\}$ in ($\circ$) und wir erhalten $x^* H_2 \leq q \cdot e$)

$\Rightarrow$ ($\square$) gilt.

$\Leftarrow$:
- Seien nun $x^* \in \hat{S}_1, y^* \in \hat{S}_2, p, q \in \mathbb{R}$ so gegeben, dass ($\square$) gilt. Wir müssen zeigen, dass ($\circ$) gilt.
- Multiplikation der ersten Zeile in ($\square$) mit x^* ergibt (da $x^* \geq 0, x^* \in \hat{S}_1$):

$$\langle x^*, H_1 y^* \rangle \leq p \cdot \langle x^*, e \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \langle x^*, e \rangle = 1, \\ x^* \in \hat{S}_1}}{=} p \tag{$\triangle$}$$

- Multiplikation der zweiten Zeile in ($\square$) mit y^* ergibt

$$\langle x^*, H_2 y^* \rangle \leq q \tag{$\triangle\triangle$}$$

- Addition von ($\triangle$) und ($\triangle\triangle$) liefert

$$\langle x^*, (H_1 + H_2) y^* \rangle \leq p + q$$

wobei wir hier eine echte Ungleichung haben, wenn ($\triangle$) oder ($\triangle\triangle$) eine echte Ungleichung ist. Aus der dritten Zeile von ($\square$) folgt aber, dass keine der beide Ungleichungen ($\triangle$) und ($\triangle\triangle$) eine echte Ungleichung sein kann. D.h.

$$\langle x^*, H_1 y^* \rangle = p$$
$$\langle x^*, H_2 y^* \rangle = q$$

- Aus der ersten Zeile von ($\square$) folgt für jedes $x \in \hat{S}_1$

$$\langle x, H_1 y^* \rangle \leq p \langle e, x \rangle = p = \langle x^*, H_1 y^* \rangle$$

$\Rightarrow$ die erste Zeile von ($\circ$) gilt.
- Aus der zweiten Zeile von ($\square$) folgt in ähnlicher Weise, dass die zweite Zeile in ($\circ$) gilt.

$\Rightarrow$ $[x^*, y^*]$ ist eine Lösung nach Nash.

#

Betrachten wir ein Nichtlineares Optimierungssproblem ($BLOA$). $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, p, q \in \mathbb{R}$ sind die Unbekannten, H_1, H_2 sind gegebene $[m,n]$-Matrizen.

$$\begin{cases} \langle x, H_1 y\rangle + \langle x, H_2 y\rangle - & p - q \to \max\limits_{x,y,p,q} \\ H_1 y \leq p \cdot e & x H_2 \leq q \cdot e \\ y \geq 0 & x \geq 0 \\ \langle y, e\rangle = 1 & \langle x, e\rangle = 1 \end{cases} \tag{BLOA}$$

Satz 3.7 $[x^*, y^*]$ *ist eine Lösung nach Nash im Spiel* $\hat{\Gamma} \Leftrightarrow [x, y, p, q]$ *ist eine global-optimale Lösung von* (BLOA) *mit*

$$\begin{aligned} x &= x^* \\ y &= y^* \\ p &= \langle x^*, H_1 y^*\rangle \\ q &= \langle x^*, H_2 y^*\rangle \end{aligned}$$

Beweis 3.4

$\Rightarrow$:
- Sei $[x^*, y^*]$ eine Lösung nach Nash von $\hat{\Gamma}$. D.h. ($\circ$) gilt. Wir setzen

$$\begin{aligned} p &:= \langle x^*, H_1 y^*\rangle \\ q &:= \langle x^*, H_2 y^*\rangle \end{aligned} \tag{$\diamond$}$$

- Mit $x = e^i$, $i = 1, \dots, n$ und $y = e^j$, $j = 1, \dots, n$ in ($\circ$) eingesetzt ergibt sich

$$H_1 y^* \leq \langle x^*, H_1 y^*\rangle\, e = p \cdot e \tag{$\diamond\diamond$}$$

$$x^* H_2 \leq \langle x^*, H_2 y^*\rangle\, e = q \cdot e \tag{$\diamond\diamond\diamond$}$$

- Aus ($\diamond$),($\diamond\diamond$) und ($\diamond\diamond\diamond$) folgt, $[x^*, y^*, p, q]$ ist eine zulässige Lösung von (BLOA) und der zugehörige Wert der Zielfunktion ist Null.
- Sei nun $[\overline{x}, \overline{y}, \overline{p}, \overline{q}]$ eine zulässige Lösung von (BLOA), d.h.

$$\begin{cases} H_1 \overline{y} \leq \overline{p} \cdot e & \overline{x} H_2 \leq \overline{q} \cdot e \\ \overline{y} \geq 0 & \overline{x} \geq 0 \\ \langle \overline{y}, e\rangle = 1 & \langle \overline{x}, e\rangle = 1 \end{cases}$$

- Multiplikation mit $\overline{x}$ bzw. $\overline{y}$ liefert

$$\langle \overline{x}, H_1 \overline{y}\rangle \leq \overline{p}, \quad \langle \overline{x}, H_2 \overline{y}\rangle \leq \overline{q}$$

$\Rightarrow \langle \overline{x}, H_1 \overline{y}\rangle + \langle \overline{x}, H_2 \overline{y}\rangle - \overline{p} - \overline{q} \leq 0 = \langle x^*, H_1 y^*\rangle + \langle x^*, H_2 y^*\rangle - p - q$

$\Rightarrow [x^*, y^*, p, q]$ ist eine global-optimale Lösung mit $p := \langle x^*, H_1 y^*\rangle$ und $q := \langle x^*, H_2 y^*\rangle$

$\Leftarrow$:
- Sei $[x^*, y^*, p^*, q^*]$ eine global-optimale Lösung von (BLOA) mit

$$\begin{aligned} p^* &= \langle x^*, H_1 y^*\rangle \\ q^* &= \langle x^*, H_2 y^*\rangle \end{aligned}$$

- Da $[x^*, y^*, p^*, q^*]$ zulässig in (BLOA) ist, gilt

$$H_1 y^* \leq p^* \cdot e \qquad x^* H_2 \leq q^* \cdot e$$

  Andererseit gilt nach Definition von p^* und q^*

$$p^* + q^* = \langle x^*, (H_1 + H_2) y^*\rangle$$

  D.h. das System ($\Box$) aus Lemma 3.6 gilt für $[x^*, y^*, p^*, q^*]$

- Mit Lemma 3.6 folgt, $[x^*, y^*]$ ist eine Lösung nach Nash.

#

Bemerkung 3.10

1. In einem anderen Satz müsste gezeigt werden, dass (BLOA) immer eine global-optimale Lösung besitzt und jede global-optimale Lösung $[\overline{x}, \overline{y}, \overline{p}, \overline{q}]$ von (BLOA) die Eigenschaft
$$\overline{p} = \langle \overline{x}, H_1 \overline{y} \rangle$$
$$\overline{q} = \langle \overline{x}, H_2 \overline{y} \rangle$$
besitzt. Dies gilt.

2. Betrachte den Fall $H_1 = -H_2$. Dann ist das Bimatrixspiel $\hat{\Gamma}$ ein gewöhnliches Matrixspiel. $\langle x, H_1 y \rangle + \langle x, H_2 y \rangle = 0 \quad \forall x, \forall y \Rightarrow$ (BLOA) zerfällt in zwei unabhängig voneinander lösbare Lineare Optimierungsprobleme:
$$(P_1) = \begin{cases} -q \to \max \\ xH_2 \leq qe \\ x \geq 0 \\ \langle e, x \rangle = 1 \end{cases} \qquad (P_2) = \begin{cases} -p \to \max \\ H_1 y \leq pe \\ y \geq 0 \\ \langle y, e \rangle = 1 \end{cases}$$
Das sind die beiden Linearen Optimierungsprobleme aus der Theorie über Matrixspiele, vergleiche Folgerung 1.9.

27.1.2003

4 Spiele in erweiterter Form

Diese Spiele nennt man auch **Positionsspiele**.

4.1 Einleitung

Bis jetzt haben wir Spiele in Normalform betrachtet: Jeder Spieler hat nur einmal eine Entscheidung zu fällen. Jetzt werden wir Spiele betrachten, in denen jeder Spieler mehrmals Entscheidungen treffen muss. Solche Spiele entwickeln sich in der Zeit. Für die meisten praktischen Fälle ist die hier vorgestellte Theorie nicht anwendbar.

4.2 Mengenwertige Abbildungen und Graphen

Def. 4.1 (Mengenwertige Abbildung)
Sei X eine endliche Menge und sei $F : X \to X$. Wir nennen F eine *mengenwertige Abbildung (Punkt-Menge Abbildung)*, wenn $card(F(x))$ gewöhnlich größer ist als 1. Wir fordern, dass für jedes $x \in X$ eine Menge $F(x) \subset X$ definiert ist, wobei $F(x)$ die Menge aller Bilder von x durch die Abbildung F ist.
Notation: F_x statt $F(x)$.

Bemerkung 4.1

1. $F_x = \emptyset$ ist möglich.

2. Sei $A \subset X$. Dann ist $FA \overset{def}{=} \bigcup_{x \in A} F_x$.

3. Nach Definition ist $F\emptyset = \emptyset$.

4. Wenn $A_i \subset X, \quad i = 1, \ldots, n$, dann $F \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} FA_i$

5. Potenzen von F:

$$\begin{aligned}
F_x^1 &\overset{def}{=} F_x \\
F_x^2 &\overset{def}{=} F(F_x) \\
F_x^3 &\overset{def}{=} F(F_x^2) \\
&\vdots \\
F_x^{k+1} &\overset{def}{=} F(F_x^k)
\end{aligned}$$

6. $\hat{F}_x \overset{def}{=} \{x\} \cup \{F_x\} \cup \{F_x^2\} \cup \ldots \cup \{F_x^k\} \cup \ldots$ ist die transitive Abschließung von F.

7. Inverse Abbildung von F: $F^{-1}y \overset{def}{=} \{x \in X : y \in F_x\}$ für $y \in X$.

8. Potenzen der Inversen Abbildung:

$$\begin{aligned}
(F^{-1})^2 y &\overset{def}{=} F^{-1}(F^{-1}y) \\
(F^{-1})^k y &\overset{def}{=} F^{-1}\big((F^{-1})^{k-1}y\big)
\end{aligned}$$

Beispiel 4.1
Betrachte ein Spiel auf dem Schachbrett. Eine Position in diesem Spiel ist definiert durch

$$\text{Position}: \begin{cases} \text{die Figuren, die noch auf dem Brett stehen} \\ \text{das Feld, auf dem sich jede Figur befindet} \\ \text{der Information, welcher Spieler am Zug ist} \end{cases}$$

Wir bezeichnen mit X die Menge aller (vorstellbaren) Positionen auf dem Schachbrett. $x \in X$ ist eine konkrete Position. Unter F_x verstehen wird die Menge aller Positionen, die von Position x aus durch einen Zug erreicht werden können.
$F^{-1}y =$ Menge aller Positionen x mit der Eigenschaft: mit einem Zug kann Position y von x aus erreicht werden.
$\hat{F}_x =$ alle Positionen, die durch eine Reihe von Zügen ausgehend von Position x erreicht werden können.

Wenn ein X und ein F gegeben sind, können wir einen Graph mit diesen beiden Mengen verbinden. In der Ebende kann $x \in X$ als Punkt identifiziert werden. Für ein $y \in F_x$ können wir die Punkte von x und y mit einem Pfeil in Richtung y verbinden.
Folglich können wir das Paar (X, F) mit einem Graph in der Ebene in Verbindung bringen.

Def. 4.2 (Graph)
Wenn X eine endliche Menge ist und $F : X \to X$ eine mengenwertige Abbildung ist, dann wird das Paar (X, F) ein *Graph* genannt.

Bemerkung 4.2
1. Wir schreiben auch $G = (X, F)$.

2. $x \in X$ wird (in Verbindung mit Graphen) *Knoten* genannt.

3. Wenn $y \in F_x$, dann wird das Paar (x, y) *Bogen* genannt.

4. Seien $p = (x, y)$ und $q = (z, w)$ zwei verschiedene Bögen. Dann nennen wir diese inzident, wenn sie zwei Knoten gemeinsam haben (d.h. $x = w$ oder $y = w$ oder $x = z$ oder $y = z$).

5. Sei $G = (X, F)$ ein Graph und P sei die Menge aller Bögen in G. In diesem Fall können wir für G die Beschreibung $G = (X, P)$ verwenden.

Def. 4.3 (Pfad, Länge eine Pfades)
Sei $G = (X, F)$ ein Graph. Eine Folge $p = (p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots)$ von Bögen wird *Pfad* in G genannt, wenn der Endknoten des Bogens p_i gleich dem Anfangsknoten des Bogens p_{i+1} für alle i ist. Wenn $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, dann wird n die *Länge des Pfades* genannt.

Def. 4.4 (Baum)
Wir sagen, ein Graph $G = (X, F)$ ist ein *Baum*, wenn

- ein eindeutiger Knoten $x_o \in X$ existiert mit $\hat{F}_x = X$.
- $card(X) \geq 2$
- $card(X) < +\infty$
- Für ein beliebiges $x \in X \setminus \{x_0\}$ existiert ein eindeutiger Pfad von x_0 nach x.

Bemerkung 4.3
x_0 ist die *Wurzel* von G.

Def. 4.5 (Untergraph)
Sei $G = (X, F)$ ein Graph und $z \in X$. Dann wird der Graph $G_z \stackrel{def}{=} (X_z, F_z)$ *Untergraph* von G (mit dem Ursprung z) genannt. Hierbei ist $X_z \stackrel{def}{=} \hat{F}_z$ für ein z und $F_z x = F_x \cap X_z$.

Bemerkung 4.4

1. Wenn G ein Baum ist, dann kann der Untergraph G_z durch die Definition $G_z = (X_z, F)$ eingeführt werden.
2. Wenn G ein Baum ist, dann ist G_z auch ein Baum.

Beispiel 4.2
Betrachte den Baum in Abbildung 1.

4.3 Mehrstufige Spiele mit vollständiger Information

Def. 4.6 (Positionsspiel)
Wir sagen, dass ein n-Personen *Positionsspiel* gegeben ist, wenn die folgenden Ausdrücke eingeführt sind:

1. Ein Baum $G = (X, F)$
2. Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ und n Spieler $P_1, P_2, \ldots, P_n$
3. Eine Partition von X in $n + 1$ Mengen $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$,
   d.h. $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} X_i, \quad X_i \cap X_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$.
4. Für alle $x \in X_{n+1}$ gilt $F_x = \emptyset$.
5. n reelle Funktionen $H_i(x)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $H_i : X_{n+1} \to \mathbb{R}$.

Bemerkung 4.5

1. X_{n+1} wird die *Menge der Endpositionen* genannt.
2. $X_i \; i = 1, \ldots, n$ wird die *Vorrangmenge* von Spieler P_i genannt. (Interpretation: in jedem $x \in X_i$ muss P_i eine Entscheidung treffen (ist am Zug))
3. H_i ist die Gewinnfunktion für Spieler P_i auf den Endknoten.

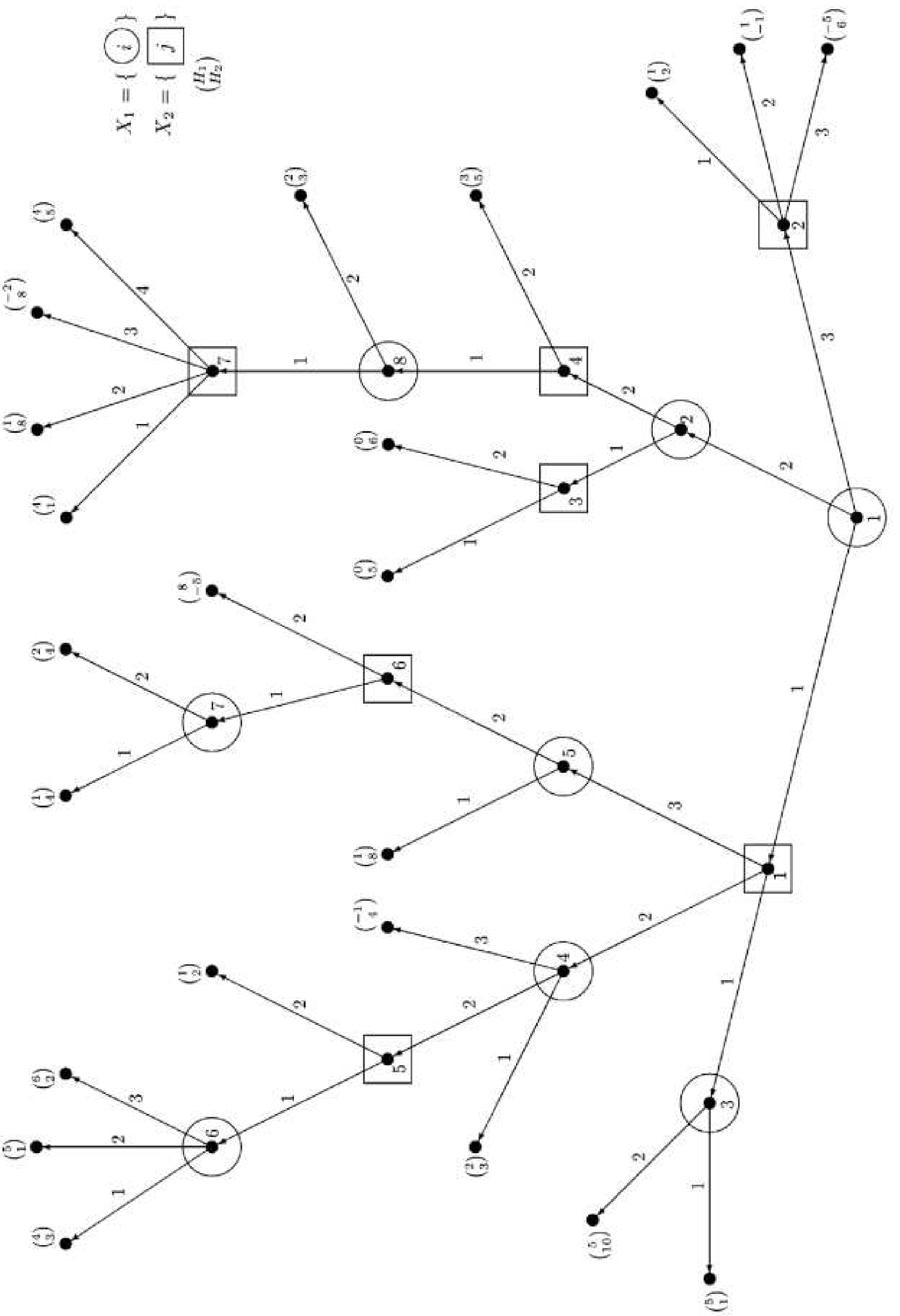


Abbildung 1: Baum eines 2-Personen Positionsspieles

4. Unser Positionsspiel soll folgendermaßen verstanden werden:
Angenommen, die Wurzel x_0 von G gehört zu X_{i_1}. Der Spieler P_{i_1} muss ein Element $x_1 \in F_{x_0}$ wählen. Angenommen, $x_1 \in X_{i_2}$. Dann wählt Spieler P_{i_2} ein Element $x_2 \in F_{x_1}$. Wenn x_2 nicht zu X_{n+1} gehört, wird das Spiel in analoger Weise fortgeführt. Andernfalls ist das Spiel vorbei und P_i erhält den Gewinn $H_i(x_2) \quad i = 1, \dots, n$.

29.1.2003

5. Partie des Spieles: Sei ein n-Personen Positionsspiel $G = (X, F)$ gegeben. Ein Pfad von der Wurzel x_0 zu einem Endknoten wird eine *Partie* des Spieles genannt.
Beachte: Für einen festen Endknoten x_e gibt es einen eindeutigen Pfad von der Wurzel x_0 des Graphen nach x_e $\Rightarrow$ damit ist auch die Partie festgelegt.

6. Vollständige Information: Wir gehen davon aus, dass die Spieler in einem Positionsspiel (nach Definition 4.6) voll informiert sind. Exakter: Die Spieler kennen den Baum potenziell und die Gewinne in den Endknoten. Außerdem, wenn Spieler P_i in Position $x_i \in X_i$ am Zug ist, dann kennt er diese Position, d.h. ihre genaue Charakterisierung. Solche Spiele werden *Positionsspiele mit vollstängder Information* genannt.

Wir werden ein Spiel in Normalform einführen, das einem gegebenen Positionsspiel entspricht, genannt Normalisierung eines Positionsspieles. Wir müssen festlegen, was wir unter einer Strategie eines Spielers verstehen.

Def. 4.7 (Strategie)
Sei ein n-Personen Positionsspiel $G = (X, F)$ gegeben. Eine eindeutige Abbildung $u_i : X_i \to F(X_i)$ wird *Strategie* von P_i genannt.

Bemerkung 4.6

1. Betrachte Abbildung 1. Betrachte P_1. Eine konkrete Strategie von P_1 ist z.B.

$$\begin{array}{cccccccc} [\,2, & 1, & 1, & 3, & 2, & 3, & 1, & 1\,] \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ \end{array}$$

Eine Strategie beschreibt das Verhalten (die Entscheidung) für jeden Knoten der Vorrangmenge X_i von P_i.
Wieviele Strategien hat P_1 in unserem Beispiel? – $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot = 864$ Strategien.
Eine konkrete Strategie von P_2 ist z.B.

$$\begin{array}{ccccccc} [\,3, & 1, & 1, & 2, & 2, & 1, & 4\,] \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{6} & \boxed{7} \end{array}$$

P_2 hat $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot = 576$ Strategien.

2. Mit U_i bezeichnen wir die Menge aller möglichen Strategien von $P_i \quad i = 1, \dots, n$.

3. $u = [u_1, \dots, u_n] \in \prod_{i=1}^{n} U_i$ wird *Situation* im Spiel genannt. Es ist offensichtlich, dass wenn eine Situation im Spiel fest ist, ist auch die Partie im Spiel und ein Endknoten festgelegt. Sei in unserem Beispiel $u = [u_1, u_2]$ mit $u_1 = [2, 1, 1, 3, 2, 3, 1, 1]$ und $u_2 = [3, 1, 1, 2, 2, 1, 4]$. Die Partie verläuft entlang des folgenden Pfades:

$$① \longrightarrow ② \longrightarrow \boxed{3} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ Gewinn von } P_1 \\ \leftarrow \text{ Gewinn von } P_2 \end{array}$$

4. Sei $u = [u_1, \ldots, u_n]$ eine Situation. Da einer Situation u ein Endknoten $x_e \in X_{n+1}$ entspricht, führen wir eine Gewinnfunktion $K_i : \prod_{i=1}^{n} U_i \to \mathbb{R}$ folgendermaßen ein:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gewinn von } P_i \text{ bei} \\ \text{Strategie } u}}{K_i(u)} \quad \overset{def}{=} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gewinn von } P_i \text{ im} \\ \text{Positionsspiel } G \text{ am} \\ \text{Endknoten } x_e}}{H_i(x_e)}$$

Def. 4.8 (Normalisierung eines Positionsspiels)
Sei $G = (F, X)$ ein n-Personen Positionsspiel. Seien die Strategien $u \in \prod_{i=1}^{n} U_i$ und die Gewinne $K_i(u)$ wie oben eingeführt.
Dann wird das Spiel $\Gamma = \langle P_1, P_2, \ldots, P_n, U_1, U_2, \ldots, U_n, K_1, K_2, \ldots, K_n \rangle$ in Normalform *Normalisierung des Positionsspieles* G genannt.

Bemerkung 4.7

1. In unserem Beispiel (Abbildung 1) ist die Normalisierung ein Bimatrixspiel. Dieses hat zwei Matrizen, jede mit 864 Zeilen und 576 Spalten.
2. Für Spiele in Normalform existieren Lösungskonzepte (z.B. von Nash). Durch die Normalisierung können wir ein Lösungskonzept für Positionsspiele einführen. Wir werden später das Konzept von Nash anwenden.

4.4 Absolute Gleichgewichtssituation

Sei $G = (X, F)$ ein n-Personen Positionsspiel.
Sei $\Gamma = \langle P_1, P_2, \ldots, P_n, U_1, U_2, \ldots, U_n, K_1, K_2, \ldots, K_n \rangle$ die Normalisierung dieses Spieles. Sei $z \in X$ und $G_z = (X_z, F)$ ein Untergraph von G. Durch G ist auf G_z ebenfalls ein Positionsspiel definiert. Wir bezeichnen dieses Spiel ebenfalls mit G_z.

- Wir brauchen die Normalisierung von G_z (unter der Annahme, dass wir die Normalisierung Γ von G kennen).
- Sei Y_i^z die Vorrangmenge von P_i im Unterspiel G_z. Offensichtlich ist

$$Y_i^z = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vorrangmenge} \\ \text{von } P_i \text{ in } \Gamma}}{X_i} \quad \cap \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Menge der} \\ \text{Positionen in} \\ G_z}}{X_z}$$

- Die Menge der Endpositionen in dem Unterspiel G_z wird mit Y_{n+1}^z bezeichnet. Wieder gilt:

$$Y_{n+1}^z = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Menge der} \\ \text{Endknoten} \\ \text{in } \Gamma}}{X_{n+1}} \quad \cap \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Menge der} \\ \text{Positionen} \\ \text{in } G_z}}{X_z}$$

- Sei u_i eine Strategie von P_i in der Normalisierung Γ i=1,…,n. Für jedes $x \in Y_i^z$ setzen wir

$$u_i^z(x) \overset{def}{=} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Entscheidung von } P_i \text{ im} \\ \text{Knoten } x \text{ entsprechend} \\ \text{der Strategie } u_i \text{ in G}}}{u_i(x)}$$

 Sei U_i^z die Menge aller dieser $u_i^z(x)$, also die Menge aller Strategien von P_i im Unterspiel G_z.
 $\Rightarrow$ ein $u_i^z \in U_i^z$ beschreibt das Verhalten von P_i in seiner Vorrangmenge Y_i^z.

- Jedes $u^z = [u_1^z, \ldots, u_n^z] \in \prod_{i=1}^{n} U_i^z$ definiert einen Endknoten $x_e \in Y_{n+1}^z$. Wir setzen

$$K_i^z(u) \stackrel{def}{=} H_i(x), \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

- Sein nun $\Gamma = \langle P_1, P_2, \ldots, P_n, U_1^z, U_2^z, \ldots, U_n^z, K_1^z, K_2^z, \ldots, K_n^z \rangle$ ein Spiel in Normalform, das eine Normalisierung des Unterspiels $G_z(X_z, F)$ ist.
- Wir kennen die Lösung nach Nash für ein solches Spiel (Def. 3.2 auf Seite 65).

Def. 4.9 (absolute Gleichgewichtssituation nach Nash)
Sei $\Gamma = \langle P_1, P_2, \ldots, P_n, U_1, U_2, \ldots, U_n, K_1, K_2, \ldots, K_n \rangle$ ein Spiel in Normalform, das eine Normalisierung des n-Personen Positionsspieles $G = (X, F)$ ist. Sei $u^* = [u_1^*, \ldots, u_n^*]$ eine Lösung nach Nash von Γ. Wir nennen diese Lösung eine *absolute Gleichgewichtssituation nach Nash*, wenn die Beschränkung auf jedes Unterspiel $G_z = (X_z, F)$ eine Lösung nach Nash in der Normalisierung Γ_z von G_z festlegt.

3.2.2003

Bemerkung 4.8
$u^* = [u_1^*, u_2^*]$ und $\overline{u}^* = [\overline{u}_1^*, \overline{u}_2^*]$ sind beides absolute Gleichgewichtssituationen nach Nash, wobei

$$\begin{aligned} u_1^* &= [2,2,1,1,2,3,2,2] \\ u_2^* &= [3,3,2,2,2,1,3] \\ \overline{u}_1^* &= [1,2,2,2,2,3,2,1] \\ \overline{u}_2^* &= [1,3,2,2,1,1,2] \end{aligned}$$

$\overline{u}^*$ führt zur Partie $\quad 1 \longrightarrow \boxed{1} \longrightarrow 3 \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Gewinn von } P_1 \\ \leftarrow \text{Gewinn von } P_2 \end{matrix}$

u^* führt zum Partie $\quad 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \boxed{4} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Gewinn von } P_1 \\ \leftarrow \text{Gewinn von } P_2 \end{matrix}$

$\Rightarrow$ Beide Situationen sind absolute GGS nach Nash, führen aber zu unterschiedlichen Gewinnen von P_1 und P_2.

Satz 4.1 *Sei $G = (X, F)$ ein Positionsspiel und sei Γ die Normalisierung dieses Spiels. Dann existiert in einem solchen Spiel Γ eine GGS nach Nash, die eine absolute GGS nach Nash ist.*

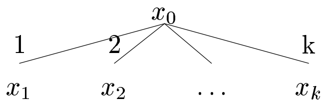
Bemerkung 4.9

1. In einem n-Personen Spiel in Normalform muss eine GGS nach Nash nicht existieren. Betrachte z.B. Matrixspiele: In solchen Spielen ist eine GGS nach Nash (in reinen Strategien) ein Sattelpunkt in der Matrix. Ein solcher muss nicht existieren. Unser Satz sagt aber aus, dass wenn ein Spiel in Normalform die Normalisierung eines Positionsspiel ist, dann existiert eine GGS nach Nash in diesem Spiel.
2. Wenn das Positionsspiel ein Nullsummenspiel ist (d.h. $\sum_{i=1}^{n} H_i(x_i) = 0, \quad \forall x_i \in X_{n+1}$), dann ist dessen Normalisierung Γ auch ein Nullsummenspiel. $\Rightarrow$ Die Normalisierung muss ein Matrixspiel sein, da $card(X) < +\infty \Rightarrow$ eine GGS nach Nash in der Normalisierung Γ ist mit einem Sattelpunkt in der Matrix verbunden.
3. Wenn wir den obigen Punkt auf das Schachspiel anwenden, sehen wir, dass die Normalisierung von einem Schachspiel ein Matrixspiel ist und diese Matrix hat einen Sattelpunkt (= GGS nach Nash). $\Rightarrow$ Das Schachspiel hat einen Wert ($+1$ oder -1 oder 0) und es existieren reine Strategien für beide Spieler.

Beweis 4.1 (von Satz 4.1)

1. Länge eines Positionsspieles: Sei $p = (p_1, p_2 \ldots, p_n)$ ein Pfad von der Wurzel x_0 zu einem Endknoten $x_e \in X_{n+1}$. Dann ist k die Länge des Pfades p. Die Länge des längsten Pfades von der Wurzel zu einem Endknoten wird *Länge des Baumes* genannt.
   Wir werden den Beweis mit vollständiger Induktion über der Länge des Baumes führen.

2. Sei ein Positionsspiel $G = (X, F)$ mit Länge 1 gegeben.



   An jedem $x_i \in X_{n+1}$ sind die Werte $H_s(x_i)$ bekannt ($H_s(x_i)$ ist der Gewinn von P_s im Knoten x_i, i=1,...,k, s=1,...,n).
   Um zu beweisen, dass Satz 4.1 für ein Positionsspiel mit Länge 1 gilt, müssen wir die <u>Existenz</u> einer GGS nach Nash, die eine absolute GGS nach Nash ist, zeigen.
   Angenommen $x_0 \in X_{i_1}$ (d.h. in x_0 ist P_{i_1} am Zug). Sei $z_0 \in F_{x_0}$ so, dass

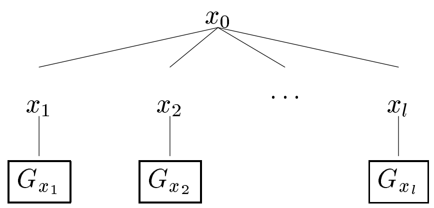
$$H_{i_1}(z_0) = \max_{x_e \in F_{x_0}} H_{i_1}(x_e)$$

   Wir vereinbaren die folgenden Strategien: $u^* = [u_1^*, \ldots, u_n^*]$, wobei $u_{i_1}^*$ heißt: Wähle z_0 in x_0, alle anderen u_i^* sind leer (P_i muss für $i \neq i_1$ keine Entscheidung in diesem Spiel treffen).
   Offensichtlich gilt:

$$\begin{cases} K_{i_1}(u^*) \geq K_{i_1}(u^*/u_{i_1}) & \forall u_{i_1} \\ K_i(u^*) = K_i(u^*/u_i) & \forall i \neq i_1 \,, \forall u_i \end{cases}$$

   $\Rightarrow$ u^* ist eine GGS nach Nash (d.h. eine solche existiert) $\Rightarrow$ Dieses u^* ist auch eine absolute GGS nach Nash, da u^* GGS nach Nash in jedem Unterspiel ist (Unterspiele sind nur das Originalspiel oder Endknoten).

3. Angenommen, der Satz gilt für ein beliebiges Positionsspiel der Länge $(k-1)$. Betrachten wir nun ein Spiel $G = (X, F)$ der Länge k.



   Wir betrachten das Unterspiel G_z mit $z \in F_{x_0}$. Nach Induktion existiert in der Normalisierung Γ_z des Unterspieles G_z eine absolute GGS nach Nash $u^{*z} = [u_1^{*z}, \ldots, u_n^{*z}]$.
   Angenommen $x_0 \in X_{i_1}$ (d.h. in x_0 ist P_{i_1} am Zug). Wir führen $u^* = [u_1^*, \ldots, u_n^*]$ wie folgt ein:

$$\begin{cases} u_i^*(x) = u_i^{*z}(x) & \forall x \in X_i \cap X_z, \forall i \\ u_{i_1}^*(x_o) = z^* & \forall z \in F_{x_0} \end{cases}$$

   wobei z^* so gewählt wird, dass

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gewinnfunktion von} \\ P_{i_1} \text{ im Unterspiel } G_{z^*}}}{K_{i_1}^{z^*}(u^{*z^*})} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gewinnfunktion von} \\ P_{i_1} \text{ im Unterspiel } G_z}}{\max_{z \in F_{x_0}} K_{i_1}^{z}(u^{*z})}$$

Es bleibt zu zeigen, dass u^* eine GGS nach Nash und sogar eine absolute GGS nach Nash in der Normalisierung Γ von $G = (X, F)$ ist. Offensichtlich ist u^* eine GGS nach Nash in jedem Unterspiel außer eventuell in dem Originalspiel.
Wir haben $\Gamma = \langle P_1, P_2, \ldots, P_n, U_1, U_2, \ldots, U_n, K_1, K_2, \ldots, K_n \rangle$

$$K_i(u^*) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn } i \neq i_1 \text{ hat } P_i \text{ in } x_0 \text{ keine} \\ \text{Entscheidungen zu treffen} \Rightarrow \\ \text{seine Gewinnfunktion ist die} \\ \text{Gewinnfunktion im Unterspiel} \\ G_{z^*} \text{ (da } z^* \text{ die Entscheidung} \\ \text{von } P_{i_1} \text{ in } x_0 \text{ ist)}}}{=} K_i^{z^*}(u^{*z^*}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } u^{*z^*} \\ \text{eine GGS} \\ \text{nach Nash} \\ \text{in } G_{z^*} \text{ ist}}}{\geq} K_i^{z^*}\big((u^*/u_i)^{z^*}\big) \quad \forall u_i, \forall i \neq i_1$$

$\Rightarrow u^*$ ist für P_i, $i \neq i_1$, akzeptabel im Spiel Γ.
Betrachte nun $K_{i_1}(u^*)$.

$$K_{i_1}(u^*) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Def.} \\ \text{von } u^*}}{=} K_{i_1}^{z^*}(u^{*z^*}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Def.} \\ \text{von } z^*}}{=} \max_{z \in F_{x_0}} K_{i_1}^{z}(u^{*z}) \underset{\substack{\uparrow \\ z_0 \in F_{x_0} \text{ so, das} \\ z_0 = u_{i_1}(x_0) \text{ für ein} \\ \text{gewähltes } u_{i_1}}}{\geq} K_{i_1}^{z_0}(u^{*z_0}/u_{i_1})$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Im Unterspiel } G_{z_0} \text{ spielen alle Spieler} \\ \text{die } *\text{-Strategie außer } P_{i_1}\text{, Ungleichheit,} \\ \text{da die Reduzierung } u^{*z_0} \text{ von } u^* \text{ zu } G_{z_0} \\ \text{eine GGS nach Nash in } G_{z_0} ist}}{\geq} K_{i_1}^{z_0}\big((u^*/u_{i_1})^{z_0}\big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach} \\ \text{Definition} \\ \text{von } u^*}}{=} K_{i_1}\big(u^*/u_{i_1}\big) \quad \forall u_{i_1} \in Ui_1$$

$\Rightarrow u^*$ ist für P_{i_1} akzeptabel im Spiel Γ

mit

$K_{i_1}-$ Gewinnfunktion von P_{i_1} im Spiel Γ
$K_{i_1}^{z^*}-$ Gewinnfunktion von P_{i_1} im Spiel Γ_{z^*},wobei $z^* \in F_{x_0}$
$K_{i_1}^{z}-$ Gewinnfunktion von P_{i_1} im Spiel Γ_z,wobei $z \in F_{x_0}$
$K_{i_1}^{z_0}-$ Gewinnfunktion von P_{i_1} im Spiel Γ_{z_0},wobei $z_0 \in F_{x_0}$ so vereinfacht sei, dass z_0 die Entscheidung von P_{i_1} in seiner Strategie u_{i_1} am Knoten z_0 ist

$\Rightarrow$ Die notwendige Ungleichung für eine GGS nach Nash ist auch für P_{i_1} erfüllt
$\Rightarrow u^*$ ist eine GGS nach Nash für das ganze Spiel $\Rightarrow u^*$ ist eine absolute GGS nach Nash für das ganze Spiel

#